# Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

16 mai 2020

## Exercice 1

1. Il suffit de signaler que la terme général de cette série est équivalent à $\dfrac{1}{n^2}$, terme général d'une série de Riemann convergente, pour en déduire la convergence de la série, qu'on notera $(S_n)$ pour la suite de l'exercice.
2. Commençons par factoriser le dénominateur : $n^3 + n^2 - 2n = n(n^2 + n - 2)$. Le facteur dans la parenthèse a pour racine évidente 1 et pour deuxième racine $-2$, on peut donc l'écrire sous la forme $n(n-1)(n+2)$ et décomposer notre terme général de la façon suivante : $\dfrac{n+1}{n^3+n^2-2n} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n-1} + \dfrac{c}{n+2}$, avec $a$, $b$ et $c$ trois constantes réelles.
   On peut utiliser les astuces habituelles pour calculer les constantes : en multipliant par $n$ on obtient $\dfrac{n+1}{n^2+n-2} = a + \dfrac{bn}{n-1} + \dfrac{cn}{n+2}$, il ne reste plus qu'à poser $n = 0$ pour trouver $a = -\dfrac{1}{2}$. De même en multipliant par $n-1$ et en posant $n = 1$, on a $b = \dfrac{2}{1 \times (1+2)} = \dfrac{2}{3}$ ; et en multipliant par $n+2$ avant de poser $n = -2$, on aura $c = \dfrac{-1}{(-2) \times (-2-1)} = -\dfrac{1}{6}$. On peut donc conclure que $\dfrac{n+1}{n^3+n^2-2n} = \dfrac{2}{3(n-1)} - \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{6(n+2)}$.
3. Il faut démarrer le calcul de somme à $n = 2$ puisque le terme général n'est pas défini pour $n = 0$ et $n = 1$. On va ensuite effectuer un télescopage sur le calcul de la somme partielle : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{2}{3(k-1)} - \frac{1}{2k} - \frac{1}{6(k+2)} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{3k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=4}^{n+2} \frac{1}{6k}$. Comme $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6} = 0$, tous les termes correspondant aux indices compris entre $k = 4$ et $k = n-1$ (inclus) se simplifient, et il reste quand même $S_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{9} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{6n} - \dfrac{1}{6(n+1)} - \dfrac{1}{6(n+2)} = \dfrac{24+12+8-9-6}{36} - \dfrac{2}{3n} - \dfrac{1}{6(n+1)} - \dfrac{1}{6(n+2)}$. Les termes dépendant de $n$ ont tous une limite nulle quand $n$ tend vers $+\infty$, ce qui prouve à nouveau la convergence de la série, et on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+1}{n^3+n^2-2n} = \frac{29}{36}$.

## Exercice 2

1. (a) On tirera la première boule noire au plus tard à l'avant-dernier tirage, donc $X(\Omega) = \{1, 2, \dots, N-1\}$.
   (b) On dispose donc initialement de deux boules noires et deux blanches dans l'urne. On a bien sûr $P(X = 1) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$, puis $P(X = 2) = \dfrac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ (il faut d'abord tirer une boule blanche, puis tirer une boule noire dans une urne qui ne contient plus que deux boules noires et une boule blanche). Enfin, soit on passe au complémentaire, soit on calcule

directement $P(X=3)=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ (on tire deux boules blanches aux deux premiers tirages, et on est sûr de tirer une boule noire au troisième puisqu'il ne reste que des boules noires dans l'urne). Résumons tout cela dans un superbe tableau :

| $k$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ |

Aucune loi usuelle en vue, on calcule l'espérance à la main (ce qui ne va pas beaucoup nous fatiguer avec trois valeurs) : $E(X)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{6}=\frac{5}{3}$. On va ensuite appliquer comme toujours la formule de König-Huygens pour le calcul de variance, et donc commencer par calculer $E(X^2)=\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{6}=\frac{10}{3}$. On en déduit $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{10}{3}-\frac{25}{9}=\frac{5}{9}$.

(c) On va bien sûr procéder de façon similaire à la question précédente. On a cette fois-ci initialement trois boules blanches et deux boules noires dans l'urne. On calcule successivement $P(X=1)=\frac{2}{5}$, puis $P(X=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$ (on tire une boule blanche, puis une noire dans une urne contenant deux blanches et deux noires) et de même $P(X=3)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$. Enfin, on aura $P(X=4)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$. Allez, un petit tableau ne peut pas faire de mal :

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ |

Là encore on calcule tout à la main : $E(X)=\frac{2}{5}+\frac{6}{10}+\frac{3}{5}+\frac{4}{10}=2$ (chouette, une valeur simple !), puis $E(X^2)=\frac{2}{5}+\frac{12}{10}+\frac{9}{5}+\frac{16}{10}=5$ (encore une valeur triviale !), et enfin, toujours grâce à la formule de König-Huygens, $V(X)=5-4=1$.

(d) Le calcul n'est pas plus difficile que dans les cas particuliers traités ci-dessus : $P(X=1)=\frac{2}{N}$ puisqu'il y a deux boules noires dans l'urne, qui contient par ailleurs $N$ boules au total. Et si on doit tirer une boule blanche puis une boule noire, $P(X=2)=\frac{N-2}{N}\times\frac{2}{N-1}=\frac{2(N-2)}{N(N-1)}$.

(e) Remarquons déjà que la formule fonctionne lorsque $k=1$ (un facteur $N-1$ se simplifie alors entre le numérateur et le dénominateur) et $k=1$. Plus généralement, pour réaliser l'événement $X=k$, il faut tirer des boules blanches aux $k-1$ premiers tirages, puis une noire au $k$-ème tirage, soit $P(X=k)=\frac{N-2}{N}\times\frac{N-3}{N-1}\times\dots\times\frac{N-k}{N-k+2}\times\frac{2}{N-k+1}$ (il faut simplement faire attention aux dénominateurs des deux derniers termes, il reste $N-k+1$ boules dans l'urne quand on effectue le tirage numéro $k$, puisqu'on a déjà tiré $k-1$ boules). Le facteur du 2 du dernier numérateur ne se simplifie pas, ainsi que le dernier facteur $N-k$ qui le précède. Au dénominateur, les deux premiers facteurs $N$ et $N-1$ restent, ce qui donne bien $P(X=k)=\frac{2(N-k)}{N(N-1)}$. Pour le plaisir (ce n'était pas demandé dans l'énoncé), vérifions que la somme de ces probabilités est bien égale à 1 : $\sum_{k=1}^{N-1}\frac{2(N-k)}{N(N-1)}=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N-1}N-k=\frac{2}{N(N-1)}\left((N-1)N-\frac{(N-1)N}{2}\right)=\frac{2}{N(N-1)}\times\frac{(N-1)N}{2}=1$. Tout va bien.

(f) Il s'agit cette fois de calculer $E(X)=\sum_{k=1}^{N-1}k\times P(X=k)=\frac{2}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N-1}kN-k^2=$

$\dfrac{2}{N(N-1)}\left(\dfrac{N^2(N-1)}{2}-\dfrac{(N-1)N(2N-1)}{6}\right)=N-\dfrac{2N-1}{3}=\dfrac{N+1}{3}$. Cette valeur est cohérente avec les deux cas particuliers traités plus haut. On peut pipoter que cette valeur est plus ou moins logique si on se convainc intuitivement qu'avec deux boules noires dans l'urne, on devrait tirer la première boule noire « à peu près au tiers » des tirages, et la deuxième « à peu près aux deux tiers ». Mais il semble bien difficile de faire un raisonnement plus rigoureux.

2. (a) L'expérience va s'arrêter naturellement dès qu'on tire une boule noire (puisqu'on sera alors certain d'avoir tiré dans l'urne $U_2$), ce qui peut se produire à n'importe quel tirage. Naturellement, si on tire dans l'urne $U_1$, on ne le saura pas avant le dernier tirage (puisqu'il est toujours possible que la dernière boule restant dans l'urne soit noire et qu'on ait donc choisi initialement l'urne $U_2$), et on aura dans ce cas nécessairement $Y = N$. Les valeurs prises sont $Y(\Omega) = \{1, \dots, N\}$.

   (b) Pour que $Y$ prenne une valeur différente de $N$, il faut déjà choisir l'urne $U_2$ (une chance sur deux), puis tirer la boule noire au tirage numéro $k$. Une fois choisie l'urne $U_2$, le rang de tirage de la boule noire suit une loi uniforme sur l'ensemble de ses valeurs possibles $\{1, 2, \dots, N\}$ (si ça ne vous semble pas évident, rien n'empêche de recalculer toutes les probabilités, mais ce n'est vraiment pas nécessaire, on peut considérer qu'on va continuer les tirages jusqu'au bout même après avoir tiré la boule noire et dans ce cas, toutes les positions possibles de la boule noire sont équiprobables). On a donc $P_{U_2}(Y=k)=\dfrac{1}{N}$ (en notant $U_2$ l'événement « on effectue les tirages dans l'urne $U_2$ ») et, si $k \neq N$, $P(Y=k) = P(U_2)\times P_{U_2}(Y=k)=\dfrac{1}{2N}$. Naturellement, on aura par contre $P(Y=N)=\dfrac{1}{2N}+\dfrac{1}{2}$ puisqu'il faut ajouter la probabilité de tirer dans l'urne $U_1$ (on peut écrire une formule des probabilités totales si on veut vraiment être ultra rigoureux).

   (c) On calcule donc $E(Y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\frac{k}{2N}+\frac{N}{2N}+\frac{N}{2}=\frac{N(N-1)}{4N}+\frac{N+1}{2}=\frac{N-1}{4}+\frac{N+1}{2}=\frac{3N+1}{4}$. Ce résultat est relativement logique : on a une chance sur deux d'avoir de toute façon $Y = N$, et une chance sur deux que $Y$ soit réparti uniformément entre 1 et $N$, donc avec une moyenne légèrement supérieure à $\dfrac{N}{2}$, ce qui donne globalement une moyenne un peu au-dessus de $\dfrac{3N}{4}$.

3. (a) Les seules possibilités sont celles où on a tiré deux boules noires lors des quatre premiers tirages (on peut évidemment arrêter l'expérience quand on tire la deuxième boule noire, on est alors sûr d'avoir tiré dans l'urne $U_3$). Tant qu'on tire des boules blanches, on est bien sûr obligés de continuer puisqu'on ne sait pas si on a tiré dans $U_1$ ou $U_2$ (ou même $U_3$ tant qu'on n'a pas atteint le quatrième tirage). Si on a tiré une seule boule noire, on a encore la possibilité (jusqu'au dernier tirage) d'avoir tiré dans $U_2$ ou $U_3$.

   (b) On déduit du raisonnement de la question précédente que $Z(\Omega) = \{2, 3, 4, 5\}$ (on ne peut évidemment pas tirer deux boules noires avant le deuxième tirage). De plus, $P(Z=2)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{30}$ (il faut choisir l'urne $U_3$ puis tirer dedans les deux boules noires lors des deux premiers tirages). Le calcul est un peu plus compliqué ensuite : pour $Z = 3$, il faut choisir $U_3$, puis tirer lors des trois premiers tirages soit noire, blanche, noire, soit blanche, noire, noire, ce qui donne $P(Z=3)=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{15}$. On constate que les deux tirages convenables sont en fait équiprobables. Pour le calcul de $P(Z=4)$ (qui nécessite à nouveau de tirer dans l'urne $U_3$), on a maintenant trois possibilités (noire, blanche, blanche, noire ; blanche, noire, blanche, noire ou blanche, blanche, noire, noire) qui seront à nouveau équiprobables, et on calcule donc $P(Z=4)=\dfrac{1}{3}\times3\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10}$.

Enfin, on va cette fois-ci calculer la dernière probabilité en passant au complémentaire : $P(Z=5) = 1 - \dfrac{1}{30} - \dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{10} = 1 - \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$. Résumons tout dans un petit tableau :

| $k$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{4}{5}$ |

Il ne reste plus qu'à calculer l'espérance : $E(X) = \dfrac{2}{30} + \dfrac{3}{15} + \dfrac{4}{10} + \dfrac{20}{5} = \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5} + 4 = 4 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{15}$. Sans grande surprise, cette espérance est proche de 5, il y a très peu de chances qu'on sache dans quelle urne on a tiré avant de tirer la dernière boule.

## Exercice 3

1. La somme $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k$ est une somme géométrique de raison $-t$, on sait la calculer, elle est égale à $\dfrac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{(-1)^n t^n}{1+t}$. C'est exactement l'égalité demandée par l'énoncé.

2. On intégre l'égalité précédente entre 0 et $x$. À gauche, on trouve donc $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = [\ln(1+t)]_0^x = \ln(1+x)$. À droite l'intégrale du premier morceau est présente dans la formule, donc rien à calculer, il ne reste que $\displaystyle\int_0^x \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k\,dt = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k t^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ quitte à décaler les indices. C'est encore une fois exactement la formule demandée.

3. Supposons pour commencer $x > 0$, et écrivons alors que, pour $t \in [0, x]$, $\left|\dfrac{(-1)^n t^n}{1+t}\right| = \dfrac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$. Il suffit alors d'intégrer et d'utiliser une propriété du cours sur les intégrales de valeurs absolues pour affirmer que $\displaystyle\left|\int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\,dt\right| \leqslant \int_0^x t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = 0$ si $x <\leqslant 1$, on aura dans ce cas une limite nulle pour notre intégrale. Dans le cas où $x < 0$, on doit majorer le contenu de l'intégrale (en valeur absolue) par $\dfrac{|t|^n}{1+x}$ avant de conclure de la même façon (le dénominateur $1+x$ tend certes vers 0 quand $x$ se rapproche de $-1$, mais il a une valeur constante fixée pour tout $x$ dans l'intervalle $]-1,0[$ qui suffit à prouver la convergence vers 0 de l'intégrale).
   On en déduit immédiatement en exploitant le résultat de la question précédente que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} k^n}{k} = 0$, ce qui signifie exactement que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ converge et a pour somme $\ln(1+x)$.

4. En appliquant le résultat de la question précédente pour $x = 1$, on a tout de suite $\ln(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Si on applique ce même résultat pour $x = -\dfrac{1}{2}$ (qui appartient bien à l'intervalle autorisé), on a cette fois $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}(-\frac{1}{2})^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} -\frac{1}{k2^k}$. Or, on sait bien que $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\ln(2)$, ce qui donne bien l'égalité $\ln(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.

5. C'est essentiellement une question de cours puisque l'exemple est traité dans le cours que je vous ai envoyé (en tout cas l'adjacence des deux suites). Je me recopie donc : posons $v_n = S_{2n}$

et $w_n = S_{2n+1}$. La suite $(v_n)$ est croissante : $v_{n+1} - v_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \dfrac{(-1)^{2n}}{2n+1} = -\dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} > 0$. De même, $(w_n)$ est décroissante : $w_{n+1} - w_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} + \dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} = \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{2n+2} < 0$. Comme de plus, leur différence $w_n - v_n = S_{2n+1} - S_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n}}{2n+1}$ tend vers 0, les deux suites sont adjacentes, on sait déjà que leur limite commune est égale à $\ln(2)$. D'après la monotonie des deux suites, on aura pour tout entier naturel $n$ pair, $S_n \leqslant \ln(2) \leqslant S_{n+1}$, et pour tout entier naturel impair, $S_{n+1} \leqslant \ln(2) \leqslant S_n$. Dans tous les cas, $|\ln(2) - S_n| \leqslant |S_{n+1} - S_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right| = \dfrac{1}{n+1}$.

6. Il suffit de choisir un entier $n_0$ tel que $\dfrac{1}{n_0+1} = \dfrac{1}{10}$ puisqu'on aura alors $|\ln(2) - S_{n_0}| \leqslant \dfrac{1}{10}$, ce qui revient exactement à dire que $S_{n_0}$ est une valeur approchée de $\ln(2)$ à $0,1$ près. La valeur $n_0 = 9$ convient manifestement. De même la valeur $n_1 = \dfrac{9}{9}9$ pour laquelle $\dfrac{1}{n_1+1} = 10^{-3}$ donnera une valeur approchée à $10^{-3}$ près.

7. (a) La positivité de $R_n$ est évidente. Pour obtenir la majoration demandée, il suffit d'écrire que $\forall k \geqslant n+1$, $\dfrac{1}{k2^k} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$. Comme $\dfrac{1}{2^k}$ est le terme général d'une série géométrique convergente, on peut calculer $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1+k}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$. La série $R_n$ étant majorée par une série convergeant vers $\dfrac{1}{2^n}$, elle a elle-même une somme inférieure à $\dfrac{1}{2^n}$, ce qui achève la question. Remarquons en passant qu'on a effectué une majoration fort brutale de la série (mais obligatoire, on ne sait pas calculer $R_n$), la somme de cette série est probablement en pratique nettement inférieure à $\dfrac{1}{2^n}$.

   (b) Par définition, comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \ln(2)$, l'écart entre $\ln(2)$ et la somme partielle de la série vaut exactement $R_n$, et il est donc inférieur ou égal à $\dfrac{1}{2^n}$. Il suffit donc de choisir un entier $n_2$ vérifiant $\dfrac{1}{2^{n_2}} \leqslant 0,1$ pour répondre à la question. Pas besoin d'être très fort en calcul pour constater que $n_2 = 4$ suffira. L'approximation correspondante est $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} = \frac{96+24+8+3}{192} = \frac{131}{192}$. Pour information, cette valeur est environ égale à 0.683, ce qui est une valeur approchée éloignée de $\ln(2)$ d'à peine plus que $0,01$. Tout cela confirme que nos estimations sont assez grossières, en fait la série converge encore plus vite que ce qu'on a réussi à prouver.

   (c) C'est bien sûr le même principe, on veut cette fois $\dfrac{1}{2^{n_3}} \leqslant 10^{-3}$, ce qui est le cas pour $n_3 = 10$. La deuxième série converge nettement plus vite que la première. Pour les curieux, la somme partielle correspondant à $n_3 = 10$ vaut environ $0,693065$, soit un écart avec $\ln(2)$ inférieur à $10^{-4}$.

## Exercice 4

1. Il y a quatre faces sur chaque dé donc une chance sur quatre que les deux dés tombent sur la même face (si on veut être précis, l'univers de l'expérience consistant à lancer simultanément

les deux dés a pour cardinal $4^2 = 16$, et on a quatre résultats favorables : $(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$ et $(4,4)$).

2. La variable $X_1$ prend d'après l'énoncé les trois valeurs $-2$, 1 et 3. Le calcul qu'on vient de faire prouve que $P(X_1 = 3) = \frac{1}{4}$. Les deux probabilités restantes sont égales (les deux dés se comportant de la même façon !), donc $P(X_1 = 1) = P(X_1 = -2) = \frac{3}{8}$. Allez, un dernier petit tableau de loi pour la route :

| $k$ | $-2$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|
| $P(X_1 = k)$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ |

On calcule sans problème $E(X_1) = -\frac{6}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ (je veux bien jouer à ce jeu avec vous), puis $E(X_1^2) = \frac{12}{8} + \frac{3}{8} + \frac{9}{4} = \frac{33}{8}$. Une petite application de la formule de König-Huygens donne alors $V(X_1) = \frac{33}{8} - \frac{9}{64} = \frac{255}{64}$. Oui, ce résultat grotesque n'a pas le moindre intérêt.

3. La variable $Y_2$ représente le gain total après deux parties. Il peut s'élever à $-4$ euros (deux fois $-2$ euros) ; $-1$ euro ($-2$ euros à la première partie, 1 euro à la deuxième, ou le contraire) ; 1 euros ($-2$ euros et 3 euros) ; 2 euros (deux fois 1 euro) ; 4 euros (1 euro et 3 euros) ; et enfin 6 euros pour les joueurs très chanceux (deux fois trois euros). Toutes ces probabilités se calculent très facilement à partir des résultats de la question 2, par exemple $P(Y_2 = -4) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$ ; $P(Y_2 = 1) = 2 \times \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$ etc. Ah ben en fait on va encore faire un tableau :

| $k$ | $-4$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y_2 = k)$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{9}{32}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{9}{64}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

Ce n'est pas le calcul d'espérance le plus sympathique, mais on doit obtenir un résultat cohérent avec celui de la question qui suit : $E(Y_2) = -\frac{36}{64} - \frac{9}{32} + \frac{3}{16} + \frac{18}{64} + \frac{12}{16} + \frac{6}{16} = -\frac{9}{16} - \frac{9}{32} + \frac{3}{16} + \frac{9}{32} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = -\frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$. C'est cohérent, tout va bien.

4. De façon évidente, $Y_i = \sum_{k=1}^{i} X_k$ (c'est sa définition). Toutes les variables $X_i$ ayant la même espérance, la linéarité de l'espérance permet alors de calculer directement $E(Y_i) = \sum_{k=1}^{i} E(X_k) = \frac{3i}{8}$.

5. On doit donc avoir $\frac{3i}{8} \geqslant 10$, soit $i \geqslant \frac{80}{3}$. Le joueur doit donc jouer au moins 27 parties.

6. Pour gagner au moins 10 euros en seulement 5 parties, notre joueur doit être particulièrement chanceux : soit il a gagné 3 euros à chacune des cinq parties (pour un gain total de 15 euros), soit il a gagné 3 euros à 4 parties et gagné un euro ou perdu 2 euros à la dernière partie (pour un total de 13 ou de 10 euros selon le résultat de la cinquième partie) ; soit enfin il a gagné 3 euros à trois parties et 1 euro aux deux parties restantes. La première possibilité se produit avec une probabilité $\frac{1}{4^5} = \frac{1}{1\ 024}$ ; la deuxième avec une probabilité $5 \times \frac{1}{4^4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{1\ 024}$ (il ne faut pas oublier de choisir quelle partie sur les cinq va donner un résultat différent sur les deux dés) ; la dernière possibilité avec une probabilité $\binom{5}{2} \times \frac{1}{4^3} \times \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{45}{2\ 048}$. Au total, on a donc une probabilité de $\frac{77}{2\ 048}$, ce qui n'est pas bien lourd !