Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 8

PTSI B Lycée Eiffel

16 mai 2020

Exercice 1

On cherche à déterminer la nature et la somme de la série $\sum \dfrac{n+1}{n^3+n^2-2n}$.

1. Justifier (sans chercher à la calculer pour l'instant) la convergence de cette série.
2. Effectuer une décomposition en éléments simples de $\dfrac{n+1}{n^3+n^2-2n}$.
3. Calculer la somme de la série à l'aide d'un télescopage.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, N désigne un entier fixé, supérieur ou égal à 3. On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3 indiscernables. L'urne U_1 contient N boules blanches. L'urne U_2 contient une boule noire et $N-1$ boules blanches. L'urne U_3 contient deux boules noires et $N-2$ boules blanches.

1. On effectue tout d'abord des tirages sans remise dans l'urne U_3, jusqu'à tirer une boule noire, et on note X le nombre de tirages nécessaires pour tirer une boule noire.
   (a) Préciser ce que vaut $X(\Omega)$.
   (b) Dans le cas particulier où $N=4$, donner la loi complète de X, ainsi que son espérance et sa variance.
   (c) Dans le cas particulier où $N=5$, donner la loi complète de X, ainsi que son espérance et sa variance.
   (d) Dans le cas général, calculer $P(X=1)$ et $P(X=2)$.
   (e) Montrer qu'on a toujours $P(X=k)=\dfrac{2(N-k)}{N(N-1)}$.
   (f) Calculer l'espérance de la variable X. Ce résultat vous semble-t-il logique ?
2. On choisit au hasard une urne entre les deux urnes U_1 et U_2 (probabilité $\dfrac{1}{2}$ pour chacune des deux urnes). On effectue ensuite dans cette urne (toujours la même donc) des tirages sans remise jusqu'à être certain de savoir quelle est l'urne dans laquelle on a fait ces tirages. On note Y le nombre de tirages nécessaires pour cela.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Y ? Que vaudra nécessairement Y si on a choisi initialement de piocher dans l'urne U_1 ?
   (b) Montrer que $\forall k \in \{1,\dots,N-1\}$, $P(Y=k)=\dfrac{1}{2N}$.
   (c) Calculer l'espérance de la variable aléatoire Y.
3. On choisit maintenant une urne au hasard parmi les trois urnes disponibles, puis on effectue dans cette urne des tirages sans remise jusqu'à savoir avec certitude dans quelle urne on a effectué les tirages. On note Z le nombre de tirages nécessaires pour cela. On suppose dans cette question que $N=5$.
   (a) À quelle condition peut-on avoir $Z<5$?
   (b) Déterminer la loi complète de la variable Z, puis calculer son espérance.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, x est un réel appartenant à l'intervalle $]-1,1]$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et tout réel t, on a l'égalité $\dfrac{1}{1+t} = \dfrac{(-1)^n t^n}{1+t} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k$.
2. En intégrant l'égalité précédente, montrer que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt$.
3. Montrer rigoureusement que, pour $x \in]-1,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\, dt = 0$. En déduire la converge et la somme de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.
4. Montrer à l'aide des questions précédentes que $\ln(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et que $\ln(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$.
5. En posant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes, et en déduire que $|\ln(2) - S_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
6. En déduire un entier n_0 tel que S_{n_0} soit une valeur approchée de $\ln(2)$ à $0,1$ près, puis un entier n_1 tel que S_{n_1} soit une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-3} près.
7. On se propose de retrouver des valeurs approchées de $\ln(2)$ en utilisant l'autre série évoquée à la question 4.
   (a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k \times 2^k}$. Montrer que $0 \leqslant R_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
   (b) En déduire un entier n_2 tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n_2} \frac{1}{k \times 2^k}$ soit une valeur approchée de $\ln(2)$ à $0,1$ près. Calculer la valeur approchée correspondante.
   (c) Déterminer un entier n_3 tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n_3} \frac{1}{k \times 2^k}$ soit une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-3} près (on se contentera cette fois-ci de donner une valeur explicite de n_3).

Exercice 4

Un jeu fait intervenir le lancer de deux dés équilibrés à quatre faces (mais si, ça existe), un des deux dés est rouge et l'autre est vert. Si le dé rouge donne un résultat strictement supérieur au dé vert, le joueur gagne 1 euro, si le dé vert donne un résultat strictement supérieur au dé rouge, le joueur perd 2 euros. Enfin, si les deux dés donnent le même résultat, le joueur gagne 3 euros. Un joueur effectue plusieurs parties sucessives de ce jeu. On note X_i son gain à la partie numéro i, et Y_i son gain **total** après i parties.

1. Quelle est la probabilité que les deux dés donnent le même résultat ?
2. Donner la loi, l'espérance et la variance de la variable X_1.
3. Déterminer la loi et l'espérance de la variable Y_2.
4. Exprimer la variable Y_i en fonction des variables $X_1, X_2, \ldots, X_i$. En déduire l'espérance de la variable Y_i.
5. Combien de parties le joueur devra-t-il effectuer pour gagner en moyenne 10 euros ?
6. Déterminer la probabilité que le joueur gagne (au moins) 10 euros en ayant joué 5 parties.