

Devoir Surveillé n° 7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

28 mars 2020

Exercice 0

1. Appliquons successivement les deux méthodes proposées :

- en partant de la formule vue en cours $\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$, on obtient facilement le développement demandé en élevant au carré (et en tronquant bien sûr les termes de degré supérieur à 5, il ne restera d'ailleurs pas grand chose) : $\tan^2(x) = \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\right)^2 + o(x^5) = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)$ (seul le premier double produit et le carré du premier terme sont à conserver).
- on sait par ailleurs que $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$. La fonction \tan' étant bien sûr de classe \mathcal{C}^∞ , elle admet des développements limités à tout ordre obtenus en dérivant ceux de la fonction tangente. Pour obtenir de l'ordre 5, il faut partir du développement de \tan à l'ordre 6, mais comme cette dernière fonction est impaire, il s'agit simplement de la même formule que celle utilisée ci-dessus, avec un $o(x^6)$ à la place du $o(x^5)$. On en déduit donc que $\tan'(x) = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)$, et donc que $\tan^2(x) = \tan'(x) - 1 = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)$.

2. N'essayons pas de deviner une relation de dépendance linéaire entre les trois vecteurs, et cherchons si la famille est libre en partant de la condition $a(2, 1, -1) + b(-2, 2, 1) + c(2, 4, -1) =$

0. On peut écrire cette égalité sous forme de système :
$$\begin{cases} 2a - 2b + 2c = 0 \\ a + 2b + 4c = 0 \\ -a + b - c = 0 \end{cases} .$$
 On

constate immédiatement que les lignes extrêmes du système sont proportionnelles (la première ligne est l'opposé du double de la dernière) donc le système ne peut pas être de Cramer, et la famille n'est pas libre. Plus précisément, en effectuant l'opération $L_2 - 2L_1$ on obtient $-3a + 6b = 0$, donc $a = 2b$, puis en remplaçant dans la dernière équation $-b - c = 0$ donc $c = -b$. Autrement dit, le triplet $(2, 1, -1)$ est solution non triviale du système, ou si on préfère on a la relation $2(2, 1, -1) + (-2, -2, 1) = (2, 4, -1)$. La famille n'est donc pas libre, et ne peut pas être une base de \mathbb{R}^3 (elle ne peut d'ailleurs pas être génératrice non plus puisqu'il s'agit d'une famille de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension, et qu'être génératrice suffirait à en faire une base).

3. Le plus simple, de très loin, est d'écrire simplement $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ (égalité qui n'est vraie que sur l'intervalle $] -1, 1[$, mais la fonction n'est de toute façon pas définie ailleurs). Les formules du cours nous assurent que $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, et on peut simplement remplacer x par $-x$ (qui tend bien sûr vers 0 quand x tend vers 0) pour en déduire $\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, puis on soustrait et on trouve $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

Naturellement il était aussi possible de commencer par écrire $\frac{1+x}{1-x} = (1+x)(1+x+x^2 +$

$x^3 + o(x^3)) = 1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)$, puis de poser $u = 2x + 2x^2 + 2x^3 + o(x^3)$ et appliquer un calcul de composée pour trouver $\ln(u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + o(u^3) = 2x + 2x^2 + 2x^3 - \frac{1}{2}(4x^2 + 8x^3) + \frac{1}{3}(8x^3) + o(x^3) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$. C'est plus long, mais on trouve bien sûr le même résultat !

Exercice 1

1. C'est un calcul de primitive de fonction puissance qui devrait être immédiat, on pose par exemple $F(x) = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$, et cette fonction a bien pour dérivée $\sqrt{1-x}$ (attention à ne pas oublier le signe $-$ issu de la « primitivation du $1-x$ sous la racine carrée). On en déduit que $u_0 = \left[-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 = 0 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ (on doit bien entendu trouver une valeur positive pour cette intégrale).

2. Il s'agit donc de calculer $u_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$ en posant $t = \sqrt{1-x}$. Autrement dit, $t^2 = 1-x$, donc $x = 1-t^2$. On en déduit que $dx = -2t dt$, et les bornes de l'intégrale vont devenir $t = 1$ et $t = 0$ (attention, elles seront dans le mauvais sens). On a donc $u_1 = \int_1^0 t(1-t^2) \times (-2t) dt = \int_0^1 2t^2 - 2t^4 dt = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{2}{5}t^5\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$.

3. On part donc de $u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$, et on effectue une IPP en posant $u(x) = x^n$, donc $u'(x) = nx^{n-1}$; et $v'(x) = \sqrt{1-x}$ qu'on peut intégrer en $v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$ (cf question 1). On en déduit que $u_n = \left[-\frac{2}{3}x^n(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2n}{3}x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x} dx = 0 + \frac{2n}{3} \left(\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x} dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x} dx\right)$ en développant simplement le facteur $1-x$ dans l'intégrale de droite. Bref, on obtient ce qui est demandé : $u_n = \frac{2n}{3}(u_{n-1} - u_n)$.

Autrement dit, $u_n \left(1 + \frac{2n}{3}\right) = \frac{2n}{3}u_{n-1}$, soit $\frac{2n+3}{3}u_n = \frac{2n}{3}u_{n-1}$ et donc $u_n = \frac{2n}{2n+3}u_{n-1}$.

Vérifions que ça fonctionne pour $n = 1$: $u_1 = \frac{2}{5}u_0 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$, c'est bon ! On applique la même formule pour $n = 2$ et on trouve $u_2 = \frac{4}{7}u_1 = \frac{4}{7} \times \frac{4}{15} = \frac{16}{105}$. Passionnant.

4. Comme toujours, deux méthodes possibles. On peut calculer simplement $u_{n+1} - u_n$ et déterminer son signe, ou bien se contenter de signaler que, $\forall x \in [0, 1]$, $x^{n+1} \leq x^n$, donc $x^{n+1}\sqrt{1-x} \leq x^n\sqrt{1-x}$ (on multiplie par une quantité positive). Il ne reste plus qu'à intégrer entre 0 et 1 pour en déduire que $u_{n+1} \leq u_n$ et donc que la suite (u_n) est décroissante (pour les plus paresseux, on peut même prouver directement la décroissance de la suite à partir de la relation de récurrence de la question précédente).

Comme on a par ailleurs $u_n \geq 0$ (on intègre une fonction manifestement positive pour le calcul de u_n), la suite est décroissante et minorée, donc converge. On se doute bien que sa limite sera nulle, on peut le prouver rapidement en signalant simplement que, $\forall x \in [0, 1]$, $\sqrt{1-x} \leq 1$, donc $x^n\sqrt{1-x} \leq x^n$, et en intégrant cette inégalité (entre 0 et 1, bien entendu), $u_n \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. On a donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, et le théorème des gendarmes nous permet alors d'affirmer que $\lim u_n = 0$.

5. (a) Les termes de la suite (v_n) n'étant jamais nuls, on peut calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(2n+5)! \times u_{n+1}}{(n+1)!(n+2)!} \times$

$\frac{n!(n+1)!}{(2n+3)! \times u_n} = \frac{(2n+5)(2n+4)u_{n+1}}{(n+2)(n+1)u_n}$. Or, on sait que $u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n$ (il suffit d'appliquer la formule de la question 3 en remplaçant les n par des $n+1$), donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(2n+5)(2n+4)(2n+2)}{(n+2)(n+1)(2n+5)} = 4$. Ceci prouve que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 4.

(b) Comme par ailleurs $v_0 = \frac{3!u_0}{0!1!} = 6u_0 = 4$, on en déduit que $v_n = 4^{n+1}$, puis que $u_n = \frac{4^{n+1} \times n!(n+1)!}{(2n+3)!}$. Par exemple, $u_2 = \frac{4^3 \times 2!3!}{7!} = \frac{128}{4 \times 5 \times 6 \times 7} = \frac{16}{5 \times 3 \times 7} = \frac{16}{105}$, on retrouve la bonne valeur.

(c) Puisqu'on a le droit de multiplier et de diviser des équivalents, on a donc $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim$

$$2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \times \frac{1}{\sqrt{4\pi n}} \left(\frac{e}{2n}\right)^{2n} \sim \sqrt{\pi n} \times \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n}.$$

Ensuite, on écrit $u_n = \frac{4^{n+1} \times n!(n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{(n!)^2}{(2n)!} \times \frac{4^{n+1}(n+1)}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \sim \frac{\sqrt{\pi n}}{4^n} \times \frac{4^{n+1} \times n}{8n^3} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2n^{\frac{3}{2}}}.$

Exercice 2

1. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$. Comme A et A^2 ne sont pas proportionnelles (il suffit de regarder les coefficients de la première ligne pour le constater), la famille (A, A^2) est bien une famille libre dans E .

2. On calcule maintenant $A^3 = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}$. Si la famille est liée, c'est nécessairement que A^3 est combinaison linéaire de A et de A^2 , donc qu'on peut écrire $A^3 = \lambda A^2 + \mu A$. En regardant les coefficients sur la diagonale, on obtient la condition $17 = -5\lambda - \mu$. En prenant le deuxième coefficient de la première ligne, on a $9 = 6\lambda - 3\mu$, donc $3 = 2\lambda - \mu$. On soustrait ces deux conditions et on trouve $14 = -7\lambda$, donc $\lambda = -2$. On en déduit $\mu = -7$ et on vérifie qu'en effet, $A^3 = -2A^2 - 7A$. La famille (A, A^2, A^3) est donc liée.

3. Autant tout faire à la fois en déterminant explicitement cet ensemble. En notant $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on aura $AB = \begin{pmatrix} -x-3z & -y-3t \\ 2x-z & 2y-t \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} -x+2y & -3x-y \\ -z+2t & -3z-t \end{pmatrix}$, donc la

$$\text{matrice } B \text{ commute avec } A \text{ si } (x, y, z, t) \text{ est solution du système } \begin{cases} -2y - 3z & = 0 \\ 3x & - 3t & = 0 \\ 2x & - 2t & = 0 \\ 2y + 3z & = 0 \end{cases}.$$

Un système particulièrement trivial à résoudre : on a donc $z = -\frac{2}{3}y$ et $t = x$. Autrement

dit, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ -\frac{2}{3}y & x \end{pmatrix}$, ou encore $F = \text{Vect} \left(I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \right)$. Les deux matrices dans notre Vect n'étant pas symétriques, elle forment une base de F , qui est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2.

4. On sait déjà que $I_2 \in F$ (puisque'on l'a obtenue comme élément de notre base de F), et bien sûr $A \in F$ puisque A commute avec elle-même ! On peut aussi signaler que $A = -I_2 - 3 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$. En tout cas, la famille (I_2, A) est une famille libre (les deux matrices ne sont pas proportionnelles) de deux éléments de F , c'est donc une base de F puisque F est un espace vectoriel de dimension 2. De même, A et A^2 sont deux matrices non proportionnelles

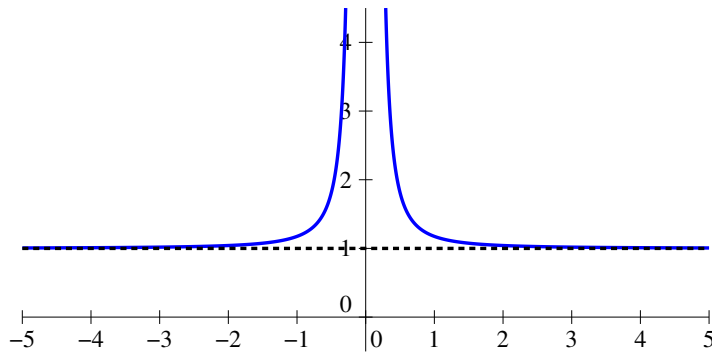
de F (la matrice A^2 commute elle aussi avec A), donc forment nécessairement une base de F . Enfin, on obtient facilement $A^2 + 2A = -3I_2$, donc $I_2 = -\frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A$. Autrement dit, $I_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)_{(A, A^2)}$.

5. Effectuons le même raisonnement que pour la question 3 : en notant $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, on aura $A^2B = \begin{pmatrix} -5x + 6z & -5y + 6t \\ -4x - 5z & -4y - 5t \end{pmatrix}$ et $BA^2 = \begin{pmatrix} -5x - 4y & 6x - 5y \\ -5z + 4t & 6z - 5t \end{pmatrix}$, donc la matrice B commute avec A^2 si $6z + 4y = 0$ et $6t - 6x = 0$ (les deux autres équations sont équivalentes aux deux premières), donc $t = x$ et $z = -\frac{2}{3}y$. Pas besoin d'aller plus loin, les équations sont les mêmes que celles décrivant F , donc $G = F$, et G est bien entendu un espace de dimension 2 dont (I_2, A) est une base.

Exercice 3

- On a bien sûr $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ puisque la fonction sh est définie sur \mathbb{R} tout entier. De plus, cette même fonction sh est impaire donc, $\forall x \neq 0$, $f(-x) = -x \text{sh}\left(-\frac{1}{x}\right) = x \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$, la fonction f est donc paire.
- On se rappelle bien sûr que $\text{sh}' = \text{ch}$, donc $f'(x) = \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x \text{sh}\left(\frac{1}{x}\right) - \text{ch}\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$.
- Comme l'inégalité n'a rien d'évident, posons $g(a) = \text{sh}(a) - a \text{ch}(a)$ et dérivons (la fonction g est définie et dérivable sur \mathbb{R}) : $g'(a) = \text{ch}(a) - \text{ch}(a) - a \text{sh}(a) = -a \text{sh}(a)$, donc g' est strictement négative sur $]0, +\infty[$, et la fonction g est décroissante sur cet intervalle. Comme $g(0) = 0$, on en déduit bien que g est strictement négative sur \mathbb{R}^{+*} . En particulier, si $a > 0$, on peut appliquer ce résultat à $\frac{1}{a}$ pour en déduire que $\text{sh}\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{1}{a} \text{ch}\left(\frac{1}{a}\right) < 0$, ce qui implique immédiatement que $f'(a) < 0$ si $a > 0$, donc que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
- Il s'agit bien sûr d'éviter de balancer une « croissance comparée » sans la moindre justification. En posant $X = \frac{1}{x}$, on aura $\lim_{x \rightarrow 0^+} X = +\infty$, et $f(x) = \frac{\text{sh}(X)}{X}$. Un vrai résultat de croissance comparée nous permet alors de dire que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh}(X)}{X} = +\infty$.
- On pose comme toujours dans ce genre de cas $X = \frac{1}{x}$, histoire d'avoir une variable X qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. On écrit alors $f(x) = \frac{\text{sh}(X)}{X}$. Il suffit d'exploiter le développement limité bien connu de la fonction sh pour en déduire que $f(x) = \frac{1}{X} \left(X + \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{120}X^5 + o(X^5) \right) = 1 + \frac{1}{6}X^2 + \frac{1}{120}X^4 + o(X^4)$, soit en revenant à la variable initiale $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{120x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.
- Le calcul précédent permet de dire successivement :
 - que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (en particulier on a une asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$).
 - que $f(x) - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6x^2}$, donc que $f(x) - 1 > 0$ au voisinage de $+\infty$, ce qui prouve que la courbe de f est au-dessus de son asymptote horizontale sur un tel voisinage.

Ce n'était pas demandé, mais une allure de courbe ne peut pas faire de mal :



7. (a) Les calculs effectués jusqu'ici ont entre autre permis de prouver que f était continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$, donc bijective de $]0, +\infty[$ vers son intervalle image $]1, +\infty[$ (puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. Comme le réel $1 + \frac{1}{n}$ appartient à cet intervalle image, l'équation $f(x) = 1 + \frac{1}{n}$ admet bien une unique solution sur \mathbb{R}^{+*} .

(b) Il suffit d'appliquer la décroissance de la fonction f (et donc de sa réciproque) à l'inéquation $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$ pour en déduire que $u_{n+1} > u_n$, et donc que la suite (u_n) est strictement croissante.

(c) Puisque notre suite est croissante, il y a deux possibilités : soit elle est majorée et converge vers un réel l , soit non et elle diverge vers $+\infty$. Si (u_n) convergeait vers l , la fonction f étant continue, on aurait nécessairement $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$. Or, par définition, $f(u_n) = 1 + \frac{1}{n}$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$. On devrait donc avoir $f(l) = 1$, ce qui est impossible (la valeur 1 n'est jamais prise par la fonction f). La seule possibilité est donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Comme u_n tend vers $+\infty$, on peut appliquer le résultat de la question 5 pour écrire $f(u_n) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right)$. Or, par définition, $f(u_n) = 1 + \frac{1}{n}$, donc on peut en déduire que $\frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right) = \frac{1}{n}$, ce qui revient à dire que $\frac{1}{6u_n^2} \sim \frac{1}{n}$. On peut sans problème passer à l'inverse pour en déduire que $6u_n^2 \sim n$, donc que $u_n \sim \sqrt{\frac{n}{6}}$ (là encore le passage à la racine carrée est légitime pour des équivalents, c'est une puissance).

(d) Repartons du fait que $u_n = \sqrt{\frac{n}{6}} + o(\sqrt{n})$, et développons un peu plus loin : $f(u_n) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + \frac{1}{120u_n^4} + o\left(\frac{1}{u_n^4}\right) = 1 + \frac{1}{n}$, donc $\frac{1}{6u_n^2} + \frac{1}{120u_n^4} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}$ (on sait que $u_n \sim \sqrt{\frac{n}{6}}$, donc $u_n^4 \sim \frac{n^2}{36}$). On peut écrire $\frac{1}{120u_n^4} \sim \frac{36}{120n^2} = \frac{3}{10n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Si on se contente de l'information qu'on possède pour l'instant pour développer le terme $\frac{1}{3u_n^2}$ restant, ça ne nous servira à rien car on n'aura pas de terme en $\frac{1}{n^2}$ qui apparaîtra. Il doit pourtant y en avoir un pour annuler le $\frac{3}{10n^2}$ qu'on vient de faire apparaître. En fait, il faut « deviner » la forme de la suite du développement asymptotique pour s'en sortir. Admettons qu'on ait en fait $u_n = \sqrt{\frac{n}{6}} + \frac{a}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (il est nécessaire d'avoir un terme d'ordre de

grandeur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ derrière notre équivalent pour que ça marche), alors $u_n^2 = \frac{n}{6} + \frac{2a}{\sqrt{6}} + o(1)$,
 donc $\frac{1}{6u_n^2} = \frac{1}{n + 2\sqrt{6}a + o(1)} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{2\sqrt{6}a}{n} + o(\frac{1}{n})} = \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{2\sqrt{6}a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$
 $\frac{1}{n} - \frac{2\sqrt{6}a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Si on ajoute maintenant ce nouveau terme à équation $f(u_n) = 1 + \frac{1}{n}$,
 on doit donc avoir $-\frac{2\sqrt{6}a}{n^2} + \frac{3}{10n^2} = 0$ pour faire disparaître ce terme en $\frac{1}{n^2}$, donc
 $a = \frac{3}{20\sqrt{6}}$, et finalement $u_n = \sqrt{\frac{n}{3}} + \frac{3}{20\sqrt{6n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.