Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 7

PTSI B Lycée Eiffel

28 mars 2020

Exercice 0

Quelques petits calculs pour s'échauffer :

1. Calculer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\tan^2(x)$ de deux façons : en élevant au carré celui de la fonction tangente, puis en exploitant la dérivée de cette même fonction tangente.
2. La famille $((2,1,-1);(-2,2,1);(2,4,-1))$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ (méthode au choix).

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$.

1. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$, et en déduire la valeur de u_0.
2. À l'aide du changement de variables $t = \sqrt{1-x}$, calculer la valeur de u_1.
3. À l'aide d'une IPP, montrer que $u_n = \dfrac{2n}{3}(u_{n-1} - u_n)$ (on intégrera la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ dans le calcul d'IPP). En déduire u_{n+1} en fonction de u_n, et préciser la valeur de u_2.
4. Déterminer la monotonie de la suite (u_n), puis prouver sa convergence, et enfin déterminer sa limite.
5. On pose $v_n = \dfrac{(2n+3)! \times u_n}{n!(n+1)!}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire une expression explicite de v_n puis de u_n.
   (c) On donne le résultat suivant, connu sous le nom de formule de Stirling :
   $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. Déterminer à l'aide de cette formule un équivalent de $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$, puis un équivalent simple de u_n.

Exercice 2

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et on note $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et vérifier que la famille (A, A^2) est une famille libre de E.
2. Calculer A^3 et vérifier que la famille (A, A^2, A^3) est une famille liée de E.
3. On note F l'ensemble des matrices de E commutant avec la matrice A. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, déterminer sa dimension et une base de F.
4. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(I_2, A)$ et que $F = \mathrm{Vect}(A, A^2)$. Donner les coordonnées de la matrice I_2 dans la base (A, A^2) de F.
5. On note G l'ensemble des matrices de E commutant avec la matrice A^2. Déterminer une base et la dimension de G, puis vérifier que $G = F$.

Exercice 3

On pose dans cet exercice $f(x) = x \,\mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Donner le domaine de définition et préciser la parité de la fonction f.
2. Calculer $f'(x)$ lorsque $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que, si $a > 0$, alors $\mathrm{sh}(a) < a \,\mathrm{ch}(a)$. En déduire les variations de f sur $]0, +\infty[$.
4. Déterminer rigoureusement $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
5. Donner un développement asymptotique de $f(x)$ à l'ordre $\dfrac{1}{x^4}$ quand x tend vers $+\infty$.
6. En déduire la limite de f en $+\infty$, et la position relative de sa courbe représentative par rapport à son asymptote en $+\infty$.
7. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 1 + \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$. On notera cette solution u_n.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, puis déterminer un équivalent simple de u_n.
   (d) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n quand n tend vers $+\infty$.