Devoir Surveillé n° 6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 février 2020

Exercice 1

1. Plusieurs possibilités ici, mais le plus normal est de chercher les racines (complexes) du polynôme P, soit les racines quatrièmes de -4. En posant $z = re^{i\theta}$, on a $z^4 = -4$ si $r^4 e^{4i\theta} = 4e^{i\pi}$. Par identification du module et de l'argument, on obtient donc $r^4 = 4$, soit $r = \sqrt{2}$, et $4\theta \equiv \pi[2\pi]$, donc $\theta \equiv \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$. Les quatre racines recherchées sont donc $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$; $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1+i$, et leurs conjugués $z_3 = -1-i$ et $z_4 = 1-i$. Autrement dit, dans $\mathbb{C}[X]$, le polynôme unitaire P se factorise sous la forme $P = (X-1-i)(X-1+i)(X+1-i)(X+1+i)$. Pour retrouver la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les facteurs conjugués, en constatant pour gagner du temps que les parties réelles des racines sont égales à ± 1 et le carré de leurs modules à 2, ce qui donne $P = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2)$.
2. La racine évidente est -1 : $(-1)^6 + 4(-1)^5 + 4(-1)^4 - 4(-1)^3 - 11(-1)^2 - 8(-1) - 2 = 1 - 4 + 4 + 4 - 11 + 8 - 2 = 0$. Testons la multiplicité de -1 en calculant les dérivées du polynôme Q : $Q' = 6X^5 + 20X^4 + 16X^3 - 12X^2 - 22X - 8$, dont -1 est encore racine : $-6 + 20 - 16 - 12 + 22 - 8 = 0$. On continue : $Q'' = 30X^4 + 80X^3 + 48X^2 - 24X - 22$, et -1 est encore racine : $30 - 80 + 48 + 24 - 22 = 0$. Bon ben on continue alors : $Q''' = 120X^3 + 240X^2 + 96X - 24$, et, incroyable mais vrai, -1 est toujours racine : $-120 + 240 - 96 - 24 = 0$. On ne va pas s'arrêter en si bon chemin : $Q^{(4)} = 360X^2 + 480X + 96$, et là ça ne marche plus : $360 - 480 + 96 = -24$. On a tout de même une racine quatrième, et on peut factoriser Q sous la forme $Q = (X+1)^4 R$, avec R de degré 2. Plutôt que de faire une division euclidienne lourdingue, notons a et b les deux racines (éventuellement complexes) du polynôme R, les relations coefficients-racines nous assurent que la somme des racines de Q, donc $-4 + a + b$, est égale à -4, donc $a + b = 0$; et que le produit des racines, donc ab (puisque $(-1)^4 = 1$), est égal à -2. On a donc $b = -a$ et $-a^2 = -2$, soit $a = \pm\sqrt{2}$, et $Q = (X+1)^4(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ (factorisation identique dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ puisque toutes les racines sont réelles).

Exercice 2

1. Pour que f soit définie, il faut déjà que $x^2 + x + 1$ soit positif, ce qui est toujours le cas (discriminant négatif). Il faut en plus de cela que le dénominateur ne s'annule pas, problème qui se produit lorsque $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1$, donc lorsque $x^2 + x + 1 = 1$ (on peut élever au carré sans problème, tout est positif), soit $x^2 + x = 0$. Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$.
2. Lorsque x tend vers -1, le numérateur de $f(x)$ tend aussi vers -1 et son dénominateur vers 0, aucune possibilité de prolongement par continuité. Précisons tout de même : $x^2 + x$ est négatif sur l'intervalle $]-1, 0[$ (entre ses racines), donc sur cet intervalle $x^2 + x + 1 < 1$ et $\sqrt{x^2 + x + 1} - 1 < 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$ (quotient de deux nombres négatifs) et $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$.

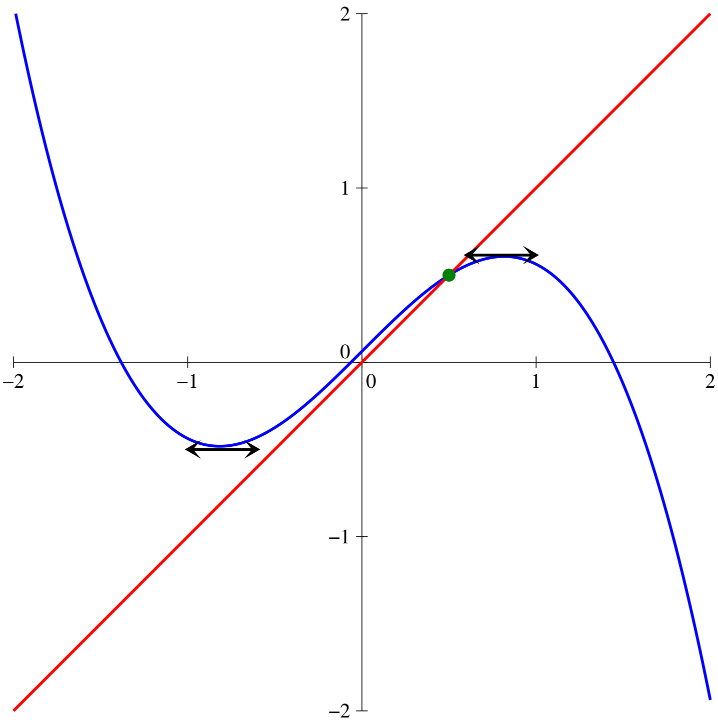
   Lorsque x tend vers 0, on ne peut pas s'en sortir aussi simplement, multiplions par une quantité conjuguée : $f(x) = \dfrac{x(1 + \sqrt{x^2 + x + 1})}{x^2 + x + 1 - 1} = \dfrac{1 + \sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1}$. Plus aucun problème, il n'y a plus de forme indéterminée, et $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$, ce qui prouve qu'on peut prolonger f en une fonction $\tilde{f}$ définie et continue en 0 en imposant $\tilde{f}(0) = 2$ (et bien sûr, si $x \neq 0$, $\tilde{f}(x) = f(x)$).

Problème

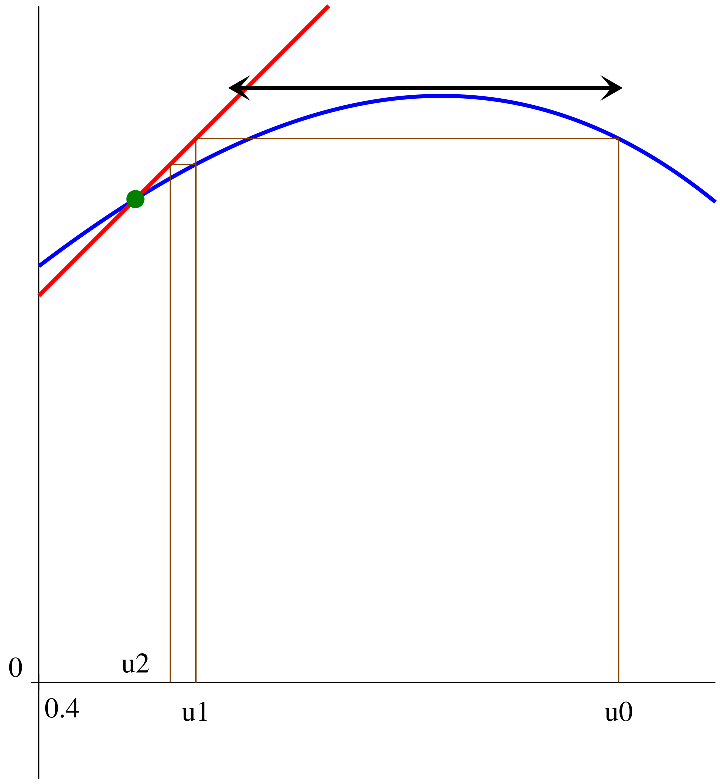
1. La fonction f est bien entendu définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1 - \dfrac{3}{2}x^2$. Cette dérivée s'annule lorsque $x^2 = \dfrac{2}{3}$, c'est-à-dire si $x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, et elle est positive entre ses racines. Les limites de f étant évidentes, on va simplement calculer les valeurs des extrema : $f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{3}} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \dfrac{1}{16}$. De même, $f\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = -\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \dfrac{1}{16} - \dfrac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$. D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{16} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{16} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\searrow$	$-\infty$

2. Puisque $f(x) - x = \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{2}x^3$, cette expression est positive si et seulement si $x^3 \leqslant \dfrac{1}{8}$, c'est-à-dire si $x \leqslant \dfrac{1}{2}$. En particulier, le seul point fixe de f est atteint lorsque $x = \dfrac{1}{2}$.
3. Avec la valeur approchée donnée, le maximum local de f se trouve à peu près à hauteur 0.6, et son minimum local à hauteur -0.5, d'où l'allure suivante :



4. (a) Même en faisant un gros zoom, on n'ira pas très loin car très vite on ne voit plus rien :



Il semble tout de même que la suite (u_n) soit décroissante et converge assez vite vers $\frac{1}{2}$.

(b) Il ne suffit bien sûr pas de calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f(1)$ pour cette question puisque la fonction f n'est pas monotone sur l'intervalle. Tout de même, puisque $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ (on savait déjà que c'est un point fixe de la fonction) et $f(1) = 1 + \frac{1}{16} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} > \frac{1}{2}$, on sait que la valeur minimale atteinte par f sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ sera $\frac{1}{2}$ (puisque la fonction est croissante puis décroissante sur l'intervalle, elle atteint son minimum à une des deux extrêmités). Quand à la valeur maximale, on l'a déjà caclulée, il s'agit de $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \simeq 0.6$ qui est très largement inférieure à 1. L'intervalle est donc bien stable par f.

(c) Une récurrence triviale pour l'appartenance de u_n à l'intervalle : c'est vrai pour u_0 puisque par hypothèse $u_0 = 1$, et $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow u_{n+1} = f(u_n) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ d'après la question précédente. Or, on a montré plus haut que, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on avait toujours $f(x) - x \leqslant 0$. En particulier, puisque u_n appartient à cet intervalle, on aura pour tout entier naturel $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, ce qui prouve que la suite est décroissante.

(d) La suite (u_n) étant décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$, elle converge nécessairement vers une limite l. De plus, la suite étant une suite récurrente, cette limite est nécessairement un point fixe de la fonction f (en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, la continuité de la fonction f nous assure que $l = f(l)$). Comme cette dernière admet un seul point fixe, on conclut immédiatement que $l = \frac{1}{2}$.

5. (a) Il suffit bien sûr de dériver une deuxième fois : $f''(x) = -3x$, expression négative sur notre

intervalle d'étude. La fonction f' est donc strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
Or, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$, et $f'(1) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$. On en déduit que, sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a toujours $-\frac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{5}{8}$, et donc certainement $|f'(x)| \leqslant \frac{5}{8}$.

(b) Il s'agit bien sûr d'appliquer l'IAF, mais pour le faire correctement, on rappelle toutes ses hypothèses : on a prouvé que, $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $|f'(x)| \leqslant 58$. De plus, les deus réels $\frac{1}{2}$ et u_n appartiennent à cet intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on peut donc leur appliquer l'IAF pour en déduire que $\left|f(u_n) - f\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \frac{5}{8}\left|u_n - \frac{1}{2}\right|$. Comme $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, on obtient exactement l'inégalité demandée par l'énoncé.

(c) On procède désormais par récurrence : pour $n = 0$, $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, qui est certainement inférieur à $\left(\frac{5}{8}\right)^0 = 1$. Supposons maintenant l'inégalité vérifiée au rang n, alors $\left|u_{n+1} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{5}{8}\left|u_n - \frac{1}{2}\right|$ d'après la question précédente, donc en appliquant l'hypothèse de récurrence $\left|u_{n+1} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{5}{8} \times \left(\frac{5}{8}\right)^n = \left(\frac{5}{8}\right)^{n+1}$. La propriété est donc héréditaire, et vraie pour tout entier naturel n.
On peut donc écrire que $0 \leqslant \left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{5}{8}\right)^n$, et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$ (suite géométrique de raison inférieure à 1), le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|u_n - \frac{1}{2}\right| = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

(d) Puisque $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{5}{8}\right)^n$, la condition $\left(\frac{5}{8}\right)^n \leqslant 10^{-3}$ impliquera $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant 10^{-3}$. Autrement dit, on est certains que u_n est une valeur approchée de $\frac{1}{2}$ à 10^{-3} à partir du moment où $\left(\frac{5}{8}\right)^n \leqslant 10^{-3}$. En passant au ln, cela se produira si $n \ln\left(\frac{5}{8}\right) \leqslant -3\ln(10)$, soit $n \geqslant \frac{3\ln(10)}{\ln(8) - \ln(5)}$ (on fait bien attention à changer le sens de l'inégalité puisqu'on divise par une quantité négative). On peut donc prendre, pour avoir une valeur entière, $n = Ent\left(\frac{3\ln(10)}{\ln(8) - \ln(5)}\right) + 1$, ce qui pour information est égal à 15.

6. (a) On utilise bien sûr les mêmes méthodes que pour la suite (u_n). C'est encore plus facile pour la stabilité de l'intervalle, puisque la fonction f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.
On calcule donc simplement $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{64} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{128} > \frac{1}{4}$ (même pas besoin de donner la valeur exacte), et on a toujours bien entendu $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, ce qui prouve la stabilité de l'intervalle.
Sur cet intervalle, la fonction f' est toujours positive et décroissante, elle est donc majorée en valeur absolue par $f'\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{3}{2} \times \frac{1}{16} = \frac{29}{32}$.

(b) Comme ci-dessus, on peut en fait se contenter de prouver que la suite est bornée par $\frac{1}{4}$ et

$\frac{1}{2}$ et croisante, et appliquer le théorème de convergence monotone pour prouver sa convergence, qui se fera nécessairement vers le seul point fixe de la fonction. Sinon, on peut aussi exploiter la majoration de $|f'(x)|$ pour appliquer l'IAF (la stabilité de l'intervalle assurant qu'on aura toujours $\frac{1}{4} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{2}$), ce qui donnera l'inégalité $\left|v_{n+1} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{29}{32}\left|v_n - \frac{1}{2}\right|$, puis par récurrence $\left|v_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{29}{32}\right)^n$, et le théorème des gendarmes assurera la convergence de la suite.

(c) Tout ce qu'on peut comparer, c'est la majoration obtenue à l'aide de l'IAF. Comme $\frac{5}{8} < \frac{29}{32}$, la suite $\left(\frac{5}{8}\right)^n$ tendra (beaucoup) plus vite vers 0 que $\left(\frac{29}{32}\right)^n$, ce qui laisse supposer que la convergence de (u_n) devrait être plus rapide que celle de (v_n). Tout cela reste bien sûr de l'ordre de la supposition dans la mesure où on ne dispose que d'une majoration et d'aucun moyen de mesurer l'écart entre les vraies distances et les majorations obtenues. Le simple fait de changer l'intervalle stable pour l'une ou l'autre des deux suites pourrait très bien modifier les majorants et renverser la situation.