Devoir Surveillé n° 6

PTSI B Lycée Eiffel

13 février 2020

Exercice 1

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les deux polynômes suivants (questions indépendantes) :

1. $P = X^4 + 4$
2. $Q = X^6 + 4X^5 + 4X^4 - 4X^3 - 11X^2 - 8X - 2$ (sachant que Q admet une racine évidente dont la multiplicité est assez élevée)

Exercice 2

On définit pour cet exercice une fonction f par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Étudier les possibilités de prolongement par continuité de la fonction f (on ne demande **pas** d'étudier la dérivabilité de la fonction obtenue après prolongement par continuité).

Problème

On s'intéresse dans cet exercice à la fonction f définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{2}x^3$.

1. Étudier les variations de la fonction f (on dressera un tableau de variations complet).
2. Étudier le signe de $f(x) - x$. On donnera en particulier la valeur du ou des points fixes éventuels de la fonction f.
3. Tracer dans un même repère une allure de la courbe représentative de f, ainsi que la droite d'équation $y = x$ (on donne la valeur approchée $\sqrt{\frac{2}{3}} \simeq 0.8$).
4. On s'intéresse dans cette question à la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Représenter sur le graphe de la question 3 les premiers termes de la suite (u_n). Que peut-on conjecturer ?
   (b) Montrer que l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ est un intervalle stable par la fonction f.

(c) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, puis que la suite (u_n) est décroissante (presque aucun calcul nécessaire).

(d) Montrer que la suite converge vers $\frac{1}{2}$ (sans utiliser l'IAF qui interviendra à la question suivante).

5. On souhaite déterminer plus précisément la vitesse de convergence de la suite (u_n) définie à la question 4.

(a) Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, et en déduire que, $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{5}{8}$.

(b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{5}{8}\left|u_n - \frac{1}{2}\right|$.

(c) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{5}{8}\right)^n$, et retrouver la valeur de la limite de (u_n).

(d) Pour quelle valeur de n peut-on affirmer que u_n est une valeur approchée de sa limite à 10^{-3} près (on ne demande qu'une formule théorique, et pas l'application numérique) ?

6. On définit désormais une suite (v_n) par $v_0 = \frac{1}{4}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.

(a) Montrer que l'intervalle $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ est stable par f, et majorer $|f'(x)|$ lorsque x appartient à $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

(b) Expliquer quelles étapes permettraient de prouver la convergenre de (v_n) vers $\frac{1}{2}$, sans détailler les démonstrations.

(c) Avec les informations dont on dispose, laquelle des deux suites (u_n) et (v_n) semble converger le plus vite vers $\frac{1}{2}$ (on donnera des éléments de justification) ?