Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

25 janvier 2020

Exercice 1

1. IL faut donc choisir treize cartes parmi les 52 du jeu (l'ordre n'a aucune importance, et les répétitions sont bien sûr interdites), soit $\binom{52}{13}$ possibilités.
2. Une fois les quatre As imposés, il reste neuf cartes à choisir, et 48 cartes disponibles dans le jeu puisqu'on a déjà retiré les quatre As, soit $\binom{48}{9} = 1\ 677\ 106\ 640$ (les nombres ne sont évidemment donnés qu'à titre indicatif et n'étaient pas demandés le jour du devoir ; pour information, le nombre calculé à cette question représente une proportion $\frac{11}{4\ 165}$ du nombre total de mains possibles, ce qui signifie qu'on aura les quatre une fois toutes les 379 donnes environ).
3. Il ne faut pas oublier de choisir quels sont les deux As tirés parmi les quatre possibles, puis il reste onze cartes à choisir parmi les 48 qui ne sont pas des As, soit $\binom{4}{2} \times \binom{48}{11} = 135\ 571\ 202\ 208$ mains possibles (un peu moins d'une fois sur cinq).
4. Pour chaque valeur, il faut choisir la couleur de la carte, autrement dit une carte parmi les quatre ayant cette valeur. Comme on répète l'opération treize fois de suite, cela donne $4^{13} = 67\ 108\ 864$ possibilités (c'est extrêmement improbable, encore nettement plus que d'avoir les quatre As).
5. Il y a au total 20 honneurs, et 32 cartes qui ne sont pas des honneurs, ce qui par le même raisonnement qu'aux premières questions donne $\binom{20}{5} \times \binom{32}{8} = 163\ 075\ 723\ 200$ mains possibles (un peu plus d'une main sur quatre, le nombre 5 est le nombre d'honneurs le plus probable parmi les mains tirées au hasard, ce qui est logique puisque $\frac{5}{13}$ des cartes du jeu sont des honneurs).
6. Un classique qui force à distinguer deux cas :
   - on tire l'As de pique, un deuxième As parmi les trois qui ne sont pas l'As de pique, quatre autres piques (parmi les douze piques restants une fois l'As isolé) et enfin sept cartes (pour compléter la main) parmi les 36 cartes qui ne sont pas des piques ni des As (douze cartes dans chacune des trois couleurs restantes). Le nombre de cas correspondants vaut $\binom{3}{1} \times \binom{12}{4}\binom{36}{7}$.
   - on ne tire pas l'As de pique, il faut alors choisir deux As parmi les trois restants, cinq piques parmi les douze restants, et six cartes parmi les 36 qui ne sont ni piques ni As, soit $\binom{3}{2} \times \binom{12}{5} \times \binom{36}{6}$ possibilités.

   Au total, $\binom{3}{1} \times \binom{12}{4}\binom{36}{7} + \binom{3}{2} \times \binom{12}{5}\binom{36}{6} = 21\ 652\ 212\ 384$ (à peu près un trentième du nombre total de mains).

7. Il faut choisir quelle couleur aura quatre cartes, puis choisir les quatre cartes parmi les treize de cette couleur, et choisir de même trois cartes parmi treize pour chacune des couleurs restantes, soit $\binom{4}{1} \times \binom{13}{4} \times \binom{13}{3}^3 = 66\ 905\ 856\ 160$ (un peu plus de 10% de la totalité des mains; la répartition la plus probable des cartes dans les quatre couleurs est 4432).
8. Même principe, mais il faut choisir la couleur de cinq cartes et celle de deux cartes, soit $\binom{1}{4} \times \binom{3}{1} \times \binom{13}{5} \times \binom{13}{3}^2 \times \binom{13}{2} = 98\ 534\ 079\ 072$ mains possibles.
9. (a) On commence bien sûr par choisir les deux couleurs dans lesquelles on n'aura pas de cartes (où celles dans lesquelles on n'aura des cartes, au choix). Ensuite, attention, on ne peut pas se contenter de choisir $\binom{26}{13}$ cartes parmi celles qui restent, car il faut éviter les cas (certes très marginaux) où on aurait une troisième chicane ! Autrement dit, il faut supprimer deux cas seulement, celui où toutes les cartes sont la première des deux couleurs restantes, et celui où toutes les cartes sont dans la deuxième. Ce qui fait finalement $\binom{4}{2} \times \left(\binom{26}{13} - 2\right) = 62\ 403\ 588$ mains possibles avec exactement deux chicanes (c'est évidemment très peu probable).
   (b) Rappelons donc : si A, B, C et D sont quatre sous-ensemble finis d'un même ensemble, alors $|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D|$.
   (c) Le but est bien sûr d'utiliser la formule de Poincaré. Notons A l'ensemble constitué de toutes les mains ayant une chicane à pique (elles ont le droit d'avoir d'autres chicanes ailleurs), B les mains ayant une chicane coeur, C les mains ayant une chicane carreau et D les mains ayant une chicane trêfle. Le nombre de main ayant au moins une chicane correspond exactement à $|A \cup B \cup C \cup D|$. Or, $|A| = \binom{39}{13}$ (il faut choisir les treize cartes de la main parmi les 39 restantes après avoir enlevé tous les piques), et de même pour les cardinaux de B, C et D. Ensuite, on calcule de même $|A \cap B| = \binom{26}{13}$ (contrairement à la question 9.a, il n'est pas ici interdit d'avoir une troisième chicane) et de même pour chacune des autres intersections deux à deux. Encore plus facilement, $|A \cap B \cap C| = 1$ (on a forcément trezize trêfles), de même pour les autres intersections trois à trois. Et enfin $|A \cap B \cap C \cap D| = 0$ (il faut bien qu'on ait des cartes quelque part !). Finalement, en appliquant la formule du crible, $|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \times \binom{39}{13} - 6 \times \binom{26}{13} + 4 = 32\ 427\ 298\ 180$, soit quand même un peu plus de 5% du nombre total de mains possibles !

Exercice 2

1. Par définition, $S_0 = \sum_{k=0}^{0} \frac{M^k}{k!} = M^0 = I_n$. De même, $S_1 = I_n + M$.
2. Calculons la valeur de la somme correspondante : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} I_3^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} I_3$. Comme l'énoncé nous affirme que $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$ (il suffit de poser $x = 0$ dans la formule donnée par l'énoncé), on en déduit que $e^{I_3} = \lim_{n \to +\infty} S_n = eI_3$. Plus généralement, si M est diagonale avec

coefficients λ_1, λ_2, ..., λ_n sur la diagonale, alors on aura $e^M = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$ (les coefficients sur la diagonale de S_n étant égaux à $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\lambda_i^k$, il suffit d'appliquer la formule de l'énoncé pour conclure).

3. On calcule donc $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = 0$. La matrice A est donc nilpotente et, $\forall k \geqslant 3$, $A^k = 0$. Toutes les sommes S_n sont donc égales à partir de $n = 2$ (et leur limite aussi), et $e^A = S_2 = I_3 + A + \dfrac{1}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Les matrices I_3 et A commutent, on peut donc appliquer la formule, dont la somme ne va contenir que trois termes puisque A est nilpotente : $B^n = (A + I_3)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k I_3^{n-k} = I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2$ (formule valable pour tout entier n, même pour $n = 0$ ou $n = 1$).
5. On calcule donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} I_3 + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} A + \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{2k!} A^2$. On sait déjà que la première somme a pour limite e, mais la deuxième aussi : le terme numéro est nul, et quitte à simplifier et à décaler les indices, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$ qui tend toujours vers e. De même, la troisième somme s'annule pour $k = 0$ et $k = 1$ et on peut ensuite décaler les indices pour obtenir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2k!}$, qui tend évidemment vers $\dfrac{e}{2}$. On en déduit que $e^B = \underset{n\to+\infty}{S}{}_n = eI_3 + eA + \dfrac{e}{2}A^2 = e \times e^A = e^{I_3}e^A$, comme demandé par l'énoncé.
6. On calcule déjà $C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, puis on constate simplement que $C^2 - 2C + I_3 = 0$.
7. On va bien sûr procéder par récurrence : au rang 0, on calcule $0C - (-1)I_3 = I_3 = C^0$, donc la formule est vérifiée. Supposons-là désormais vraie au rang n, alors $C^{n+1} = C^n \times C = nC^2 - (n-1)C = n(2C - I_3) - (n-1)I_3 = (n+1)C - nI_3$ en exploitant simplement la question précédente. La propriété est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.
8. En exploitant le résultat précédent, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k!} C - \sum_{k=0}^{n} \frac{k-1}{k!} I_3$. La première somme va tendre vers e (cf question 5), la deuxième peut s'écrire sous la forme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, elle tend donc simplement vers 0. On en déduit que $e^C = eC$.

Exercice 3

1. Il s'agit de créer une 9-liste de couleurs choisies dans un ensemble à trois éléments (les répétitions sont bien sûr possibles, et l'ordre important), il y a donc $3^9 = 19\ 683$ coloriages possibles.

2. Il faut choisir l'emplacements des trois cases verts parmi les neuf disponibles, puis choisir la couleur (parmi les deux restantes) des six cases qui ne sont pas vertes, soit $\binom{9}{3} \times 2^6 = 5\ 376$ coloriages possibles (un peu plus d'un quart du total).
3. On choisit les trois cases vertes, puis les trois cases bleues parmi les six restantes, et il ne reste plus rien à choisir, les trois dernières cases seront rouges (peu importe la couleur qu'on choisit d'abord, c'est équivalent), donc $\binom{9}{3} \times \binom{6}{3} = 1\ 680$ coloriages possibles (moins de 10% des coloriages présentent donc une répartition équilibrée des trois couleurs !).
4. On peut traiter indépendamment ce qui se passe sur chacune des lignes. Sur la première ligne, par exemple, il faut simplement choisir l'ordre des couleurs, ce qui peut se faire de 3! façons. Au total on aura donc $(3!)^3 = 216$ coloriages possibles (c'est évidemment nettement moins que dans la question précédente puisqu'il s'agit d'un cas particulier de coloriages utilisant trois fois chaque couleur).
5. Il faut choisir la couleur commune des quatre coins, puis colorier les cinq cases restantes, donc $3 \times 3^5 = 729$ coloriages possibles.
6. Pas vraiment de méthode plus rapide que de distinguer selon le nombre de cases rouges : un seul coloriage avec neuf cases rouges, $9 \times 2 = 18$ coloriages avec huit cases rouges (on choisit la case qui n'est pas rouge, puis sa couleur parmi les deux restantes), et $\binom{9}{2} \times 2^2 = 144$ avec sept cases rouges exactement. Au total, on a donc 163 coloriages avec au moins sept cases rouges.
7. On choisit la couleur de la case centrale, et il reste huit cases à colorier avec les deux couleurs restantes, soit $3 \times 2^8 = 768$ coloriages possibles.

Exercice 4

1. Utilisons la méthode du système en résolvant : $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & a \\ 2x & - & y & & & = & b \\ -x & + & y & + & 2z & = & c \end{array} \right.$. On peut additionner les deux équations extrêmes pour obtenir immédiatement $3z = a+c$, soit $z = \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}c$. Ensuite, on effectue par exemple l'opération $L_2 - L_1$ qui donne l'équation $x - z = b - a$, soit $x = z - a + b = -\frac{2}{3}a + b + \frac{1}{3}c$, et on reporte dans la deuxième équation du système initial : $y = 2x - b = -\frac{4}{3}a + b + \frac{2}{3}c$. Le système ayant toujours une solution unique, la matrice est inversible, et son inverse vaut $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Le plus simple est de commencer par calculer $AP = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice D est bien diagonale.
3. On va procéder par récurrence. Pour $n = 0$, on a bien $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3 = A^0$. Supposons maintenant la formule vérifiée au rang n, et constatons que la définition $D = P^{-1}AP$ implique $A = PDP{-}1$ (en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}). On peut alors écrire $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

Il ne reste plus qu'à calculer le produit : $PD^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} (-1)^n & -2^n & 2^n \\ 2(-1)^n & -2^n & 0 \\ (-1)^{n+1} & 2^n & 2^{n+1} \end{pmatrix}$, puis $A^n = PD^nP^{-1} =$
$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\times(-1)^{n+1}+5\times 2^n & 3\times(-1)^n - 3\times 2^n & (-1)^n - 2^n \\ 4\times(-1)^{n+1}+2^{n+2} & 6\times(-1)^n - 3\times 2^n & 2\times(-1)^n - 2^{n+1} \\ 2\times(-1)^n - 2^{n+1} & 3\times(-1)^{n+1}+3\times 2^n & (-1)^{n+1}+2^{n+2} \end{pmatrix}$.

4. En effectuant les opérations $L_1 - L_2$ et $L_1 + L_3$, on obtient les deux équations $x + z = 7$ et $3x + 3z = 21$, qui sont manifestement équivalentes. Le système n'est donc pas un système de Cramer, on peut simplement exprimer deux des variables en fonction de la troisième, par exemple $z = 7 - x$, puis en remplaçant dans la première équation initiale, $5x - 3y - 7 + x = 5$, donc $3y = 6x - 12$ et $y = 2x - 4$. On peut alors écrire $\mathcal{S} = \{(x, 2x - 4, 7 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Comme le système n'est pas de Cramer, sa matrice, qui est justement la matrice $A + I_3$, n'est pas inversible.

5. Pour changer, calculons donc : $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 14 & -9 & -3 \\ 12 & -10 & -6 \\ -6 & 9 & 11 \end{pmatrix}$. Les coefficients en-dehors de la diagonale étant identiques entre A et A^2, et ceux sur la diagonale étant augmentés de 2 quand on passe de A à A^2, on en déduit facilement que $A^2 = A + 2I$. On peut aussi remarquer si on a du temps à perdre que $A^3 = 3A + 2I$.

6. On par de l'égalité $A^2 = A+2I$ et on isole la matrice identité : $I = \frac{1}{2}(A^2 - A) = \frac{1}{2}A(A-I)$. On en déduit directement que la matrice A est inversible et que son inverse est $A^{-1} = \frac{1}{2}(A-I) =$ $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{5}{2} & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

7. C'est évidemment une récurrence classique : au rang 0, la propriété est vraie en posant simplement $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ (et également au rang 1 en posant $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$, même si ça ne sert pas pour la récurrence). Supposons désormais la propriété vraie au rang n, alors en exploitant la relation de la question 5 on peut écrire $A^{n+1} = A^n \times A = (a_nA + b_nI)A = a_nA^2 + b_nA = a_n(A+2I) + b_nA = (a_n + b_n)A + 2a_nI$. La propriété est donc héréditaire, avec de plus les relations de récurrence $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$.

8. En décalant la relation de récurrence précédente, $a_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n$. La suite (a_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation carastéristique $x^2 - x - 2 = 0$. Cette équation admet pour racines évidentes $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$, on peut donc écrire a_n sous la forme $\lambda \times (-1)^n + \mu \times 2^n$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. En appliquant cette expression pour $n = 0$ et $n = 1$, on trouve les conditions $\lambda + \mu = 0$ et $-\lambda + 2\mu = 1$, donc $\lambda = -\mu$ et $3\mu = 1$, soit $\mu = \frac{1}{3}$ et $\lambda = -\frac{1}{3}$. Autrement dit, pour tout entier naturel n, $a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$, puis $b_n = 2a_{n-1} = \frac{2^n + 2\times(-1)^n}{3}$. Enfin, on conclut : $A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}A + \frac{2^n + 2\times(-1)^n}{3}I$. On peut écrire la matrice explicitement : $A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2\times(-1)^n+5\times 2^n & 3\times(-1)^n - 3\times 2^n & (-1)^n - 2^n \\ -4\times(-1)^n+2^{n+2} & 6\times(-1)^n - 3\times 2^n & 2\times(-1)^n - 2^{n+1} \\ 2\times(-1)^n - 2^{n+1} & -3\times(-1)^n+3\times 2^n & (-1)^{n+1}+2^{n+2} \end{pmatrix}$.
C'est exactement la même matrice que celle obtenue à la question 3 (encore heureux !).

9. Inutile de s'embêter avec les coefficients, la formule générale en fonction de A et de I suffit : pour $n = -1$, on devrait avoir $a_{-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}$ et $b_{-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - 2\right) = -\frac{1}{2}$. Autrement

dit, on devrait avoir $A^{-1} = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I$, ce qui est bien le cas (cf question 6). La formule est donc valable pour $n = -1$.

10. On procède comme à la question précédente : $a_{-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - 1\right) = -\frac{1}{4}$ et $b_{-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} + 2\right) = \frac{3}{4}$. On devrait donc avoir $A^{-2} = -\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}I$. Or on sait que $A^2 = A + 2I$, et $(A + 2I)\left(-\frac{1}{4}A + \frac{3}{4}I\right) = -\frac{1}{4}A^2 - \frac{1}{2}A + \frac{3}{4}A + \frac{3}{2}I = -\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}I + \frac{1}{4}A + \frac{3}{2}I = I$, ce qui prouve que la formule souhaitée correspond bien à l'inverse de A^2. La formule est donc toujours valable pour $n = -2$ (en fait elle le reste pour tout entier relatif).

11. On souhaite désormais calculer le **commutant** de la matrice A, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les matrices M vérifiant $AM = MA$.

    (a) En bourrinnant salement et en posant $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, la condition $DN = ND$ se traduit par $\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 2b & 2c \\ -d & 2e & 2f \\ -g & 2h & 2i \end{pmatrix}$. Cinq des neuf équations ainsi obtenues (celles concernant a, e, f, h et i) sont manifestement vraies, alors que les quatre autres impliquent tout aussi trivialement la nullité du coefficient correspondant. On conclut donc que toutes les matrices de la forme $N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}$ commutent avec la matrice D.

    (b) C'est un calcul sans intérêt : $ND = DN \Leftrightarrow P^{-1}MPD = DP^{-1}MP \Leftrightarrow MPD = PDP{-}1MP \Leftrightarrow MPDP^{-1} = PDP^{-1}M \Leftrightarrow AM = MA$ puisque $A = PDP^{-1}$.

    (c) Comme $M = PNP^{-1}$, les question précédentes impliquent que les matrices commutant avec A sont de la forme $M = PNP^{-1}$, où N est de la forme obtenue plus haut, qu'on peut écrire $N = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En notant $M_1 = P \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times P^{-1}$ et ainsi de suite, on aura bien la forme souhaitée par l'énoncé. Le calcul explicite des matrices M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 a un intérêt à peu près nul. Donnons simplement $M_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.