Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 5

PTSI B Lycée Eiffel

25 janvier 2020

Exercice 1

Au bridge, on répartit entre quatre joueurs les 52 cartes d'un jeu de cartes usuel. Chaque joueur reçoit donc une **main** constituée de 13 cartes choisies au hasard parmi les 52 constituant le jeu. On ne cherchera bien sûr pas à faire les applications numériques dans cet exercice (pour information, la réponse à la première question est 635 013 559 600).

1. Combien de mains différentes un joueur donné peut-il recevoir ?
2. Combien de ces mains contiennent les quatre As ?
3. Combien de ces mains contiennent exactement deux As ?
4. Combien de ces mains contiennent exactement une carte de chaque valeur possible (un As, un Roi, etc, un 3, un 2) ?
5. Combien de ces mains contiennent exactement cinq **honneurs** (un honneur au bridge est une carte « supérieure ou égale » au 10, donc un 10, un Valet, une Dame, un Roi ou un As) ?
6. Combien de ces mains contiennent exactement deux As **et** exactement cinq piques ?
7. Combien de ces mains pour lesquelles les cartes sont réparties 4333 dans les quatre couleurs, c'est-à-dire qu'on a tiré par exemple quatre piques, trois coeurs, trois carreaux et trois trèfles (mais la couleur de quatre cartes n'est pas forcément pique) ?
8. Combien de ces mains pour lesquelles les cartes sont réparties 5332 entre les différentes couleurs (là encore, la couleur de cinq cartes n'est pas connue, tout comme celle de deux cartes) ?
9. Dans le jargon du bridge, on parle de **chicane** pour désigner une couleur où on ne possède aucune carte.
   (a) Combien de mains y a-t-il pour lesquelles le joueur possède exactement deux chicanes (autrement dit, toutes ses cartes sont réparties dans les deux couleurs restantes) ?
   (b) Rappeler l'énoncé de la formule du crible de Poincaré dans le cas d'une union de quatre ensembles.
   (c) Calculer le nombre de mains possibles pour lesquelles le joueur possède au moins une chicane.

Exercice 2

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout entier naturel n, on définit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$. Si la matrice S_n admet une limite quand n tend vers $+\infty$ (autrement dit si chacun de ses coefficients converge), alors cette limite est appelée **exponentielle** de la matrice M, et sera notée e^M. On donne le résultat suivant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

1. Que valent S_0 et S_1 ?
2. Déterminer l'exponentielle de la matrice I_3. Plus généralement, que vaudra l'exponentielle d'une matrice diagonale ?
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de la matrice A, et en déduire son exponentielle.
4. On note désormais $B = I_3 + A$. Déterminer une expression de B^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
5. En déduire l'expression de la matrice S_n associée à B, puis l'exponentielle de la matrice B. Vérifier que $e^B = e^{I_3} \times e^A$.
6. On définit maintenant $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice indépendante des matrices A et B étudiées précédemment). Calculer $C^2 - 2C + I_3$.
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $C^n = nC - (n-1)I_3$.
8. Donner l'expression de la matrice S_n associée à C, puis la valeur de e^C.

Exercice 3

On souhaite colorier toutes les cases d'une grille à trois lignes et trois colonnes en utilisant trois couleurs (bleu, vert, rouge). Chaque case doit être coloriée. Chaque réponse donnée devra être justifiée, les applications numériques ne sont pas demandées.

1. Combien y a-t-il de coloriages possibles au total ?
2. Combien de ces coloriages contiennent exactement trois cases vertes ?
3. Combien de ces coloriages contiennent exactement trois cases de chaque couleur ?
4. Combien de ces coloriages contiennent une case de chaque couleur sur chaque ligne de la grille ?
5. Combien y a-t-il de coloriages pour lesquels les quatre coins de la grille sont de la même couleur ?
6. Combien y a-t-il de coloriages contenant au moins sept cases rouges ?
7. Combien de coloriages pour lesquels aucune case située sur le bord de la grille (ou dans un coin) n'est de la même couleur que la case centrale ?

Exercice 4

On définit dans cet exercice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer l'inverse de la matrice P (méthode au choix).
2. Calculer le produit $P^{-1}AP$ (on doit obtenir une matrice diagonale).
   On notera pour la suite $D = P^{-1}AP$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-A}$. En déduire l'expression explicite de A^n.
4. Résoudre le système linéaire $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & 3y & - & z & = & 5 \\ 4x & - & 3y & - & 2z & = & -2 \\ -2x & + & 3y & + & 4z & = & 16 \end{array} \right.$.
   Que peut-on en déduire concernant la matrice $A + I$?
5. Calculer A^2 et A^3 et déterminer une relation entre les matrices A^2, A et I_3 (la matrice A^3 ne sert pas pour cette partie de la question).
6. Déduire du résultat de la question précédente si la matrice A est inversible, et si oui, donner explicitement son inverse.
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_nA + b_nI$.
8. Calculer a_n et b_n, et retrouver la valeur de A^n obtenue à la question 3 (il est bien sûr interdit d'utiliser cette même question 3 pour répondre à celle-ci).
9. La formule obtenue pour A^n reste-t-elle valable lorsque $n = -1$?
10. La formule obtenue pour A^n reste-t-elle valable lorsque $n = -2$?
11. On souhaite désormais calculer le **commutant** de la matrice A, c'est-à-dire l'ensemble de toutes les matrices M vérifiant $AM = MA$.
    (a) Déterminer les matrices qui commutent avec la matrice D obtenue à la question 2.
    (b) Montrer que, en posant $N = P^{-1}MP$, M commute avec A si et seulement si N commute avec D.
    (c) En déduire les matrices commutant avec A (on essaiera de les exprimer comme combinaisons linéaires de certaines matrices fixées, quelque chose du genre $M = aM_1 + bM_2 + \dots$, avec $(a, b, \dots)$ variant dans $\mathbb{R}$).