Devoir Surveillé n^o 4 : corrigé

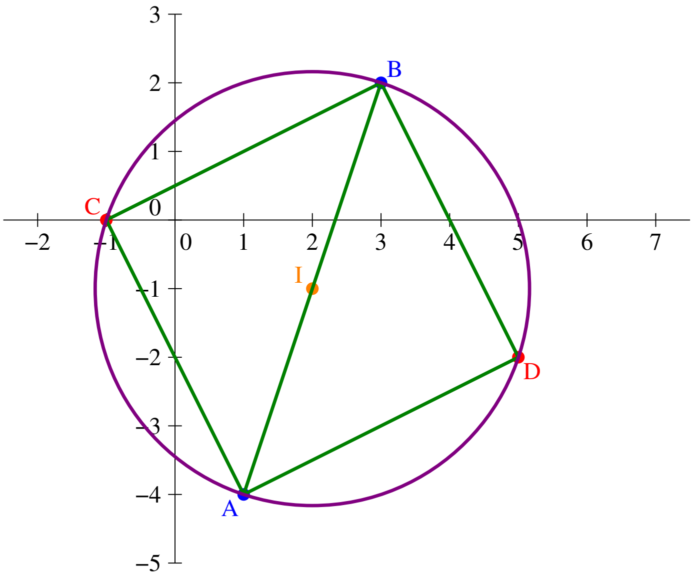
PTSI B Lycée Eiffel

14 décembre 2019

Exercice 1

1. L'équation du second degré proposée a pour discriminant $\Delta = (4-2i)^2 - 4(11-10i) = 16-16i-4-44+40i = -32+24i$. Ce n'est pas très sympathique, mais pas non plus si affreux que ça dans la mesure où $|\Delta| = \sqrt{32^2+24^2} = \sqrt{(4\times 8)^2+(3\times 8)^2} = 8\sqrt{16+9} = 8\times 5 = 40$. On pose de toute façon comme d'habitude $\delta = a+ib$ et on cherche les conditions pour lesquelles on aura $\delta^2 = \Delta$. On obtient les équations usuelles $a^2-b^2 = -32$ et $2ab = 24$, ainsi que l'équation sur le module $a^2+b^2 = |\delta|^2 = |\Delta| = 40$. En additionnant la première et la troisième équation obtenues, on trouve $2a^2 = 8$, donc $a^2 = 4$ et $a = \pm 2$, et en les soustrayant on a $2b^2 = 72$, soit $b^2 = 36$ et donc $b = \pm 6$. Comme a et b doivent être de même signe pour satisfaire la dernière équation $2ab = 24$, on gadera par exemple $\delta = 2+6i$. Les solutions de notre équation sont alors les deux nombres complexes $z_A = \dfrac{4-2i-2-6i}{2} = 1-4i$ et $z_B = \dfrac{4-2i+2+6i}{2} = 3+2i$.
2. Si le triangle ABC est isocèle rectange en C et que l'angle droit est direct (dans le sens de A vers B), cela signifie que d'une part $CA = CB$ et d'autre part $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \dfrac{\pi}{2}$, ce qui revient exactement à dire que $\dfrac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = i$ (on peut d'ailleurs obtenir cette égalité encore plus directement en signalant que le point B est alors l'image du point A par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$). On a donc $e_B - z_C = iz_A - iz_C$ ou encore $z_C = \dfrac{iz_A - z_B}{i-1}$, soit $z_C = \dfrac{i+4-3-2i}{i-1} = \dfrac{1-i}{i-1} = -1$.
   On calcule de même l'affixe du point D en partant cette fois de la condition $\dfrac{z_B - z_D}{z_A - z_D} = -i$ (l'angle est orienté dans l'autre sens), ce qui donne $z_B - z_D = -iz_A + iz_D$, soit $z_D = \dfrac{z_B + iz_A}{1+i} = \dfrac{3+2i+i+4}{1+i} = \dfrac{(7+3i)(1-i)}{2} = 5-2i$.
   Par construction, les quatre côtés du quadrilatère $ABCD$ sont égaux (les deux triangles isocèles rectanges ABC et ABD ayant la même hypothénuse AB, leurs côtés de l'angle droit ont même longueur), donc il s'agit au moins d'un losange. De plus, ce losange a deux angles droits (en C et en D), ce qui suffit à en faire un carré (si vous n'êtes pas convaincu, vous prouvez qu'un des deux angles restants est droit, ce qui n'est pas compliqué non plus ; la figure est de toute façon consitué de deux demi-carrés identiques accolés). La figure est située après la réponse à la question 3.
3. En utilisant les caractérisations classiques des arguments complexes, le triangle ABM est rectangle en M si $\arg\left(\dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$. En posant simplement $z_M = a+ib$, celà revient à dire que $\dfrac{a+ib-3-2i}{a+ib-1+4i} \in i\mathbb{R}$. Quitte à multiplier en haut et en bas par le conjugué du dénominateur et à oublier justement ce dénominateur (qui sera de toute façon réel positif),

on trouve l'équation $((a-3)+(b-2)i)((a-1)-(b+4)i) \in i\mathbb{R}$, soit en isolant la partie réelle qui doit s'annuler $(a-3)(a-1)+(b-2)(b+4)=0$. On développe joyeusement tout ça : $a^2-4a+b^2+2b-5=0$, soit $(a-2)^2+(b+1)^2=10$, et on reconnait l'équation d'un cercle de centre $I(2-i)$ et de rayon $\sqrt{10}$ (auquel il faut enlever les points A et B si on veut être rigoureux). Une figure contenant tous les éléments importants :



4. On constate que $z_I = \dfrac{z_A+z_B}{2}$, autrement dit que I n'est autre que le milieu du segment $[AB]$. De plus, on calcule aisément $AB = |z_A - z_B| = |-2-6i| = \sqrt{4+36} = 2\sqrt{10}$, ce qui prouve que le cercle de la question précédente a pour diamètre AB. En fait, ce cercle est de fait **le** cercle de diamètre $[AB]$, ce qui est évidemment normal si on se souvient de ses cours de géomtétrie du collège : le triangle ABM est rectangle en M si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ (comme quoi parfois les complexes ne servent au fond pas à grand chose).

Exercice 2

1. On espère que cette question sera réussie par tout le monde sans difficulté : pour $n=3$, $a = e^{i\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; pour $n=4$, $a = e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; et pour $n=6$, $a = e^{i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

2. Dans ce cas, on a $a^0 = 1$; $a^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ et $a^3 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc la somme demandée est égale à $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1 + i(1+\sqrt{2})$. Calculons d'autre part $\dfrac{2}{1-a} = \dfrac{2}{1-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{4}{2-\sqrt{2}-i\sqrt{2}} = \dfrac{4(2-\sqrt{2}+i\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})^2+2} = \dfrac{4(2-\sqrt{2}+i\sqrt{2})}{8-4\sqrt{2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$. Or, $\dfrac{1}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$, donc $\dfrac{2}{1-a} = \dfrac{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})+i\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{2} = 1 + i(\sqrt{2}+1)$, ce qui est bien la valeur obtenue plus haut.

3. On peut bien sûr effectuer le calcul beaucoup plus rapidement en exploitant une somme géométrique : $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}$. Or $a^n = e^{i\pi} = -1$, et la formule en découle trivialement.

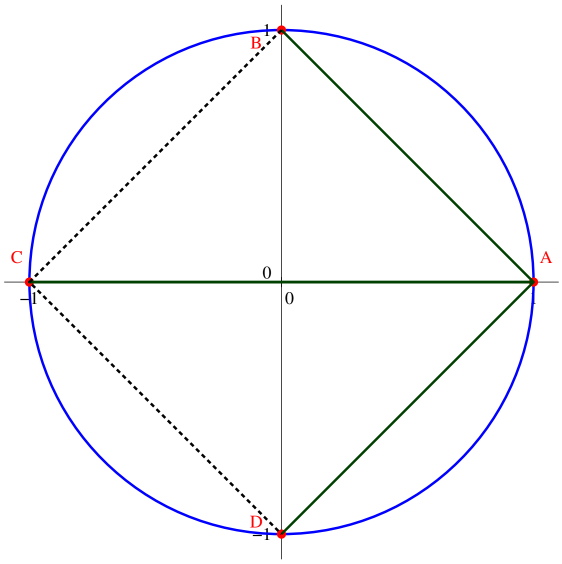
4. Puisque $a^k = e^{i\frac{k\pi}{n}} = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, les deux sommes qu'on cherche à calculer

dans cette question sont tout simplement la partie réelle et la partie imaginaire de la somme calculée à la question précédente. Tentons donc d'écrire le nombre A sous forme algébrique : $A = \dfrac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \dfrac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}}(e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}})} = \dfrac{2}{-2ie^{i\frac{\pi}{2n}}\sin(\frac{\pi}{2n})} = \dfrac{ie^{-i\frac{\pi}{2n}}}{\sin(\frac{\pi}{2n})} = 1 + \dfrac{i}{\tan(\frac{\pi}{2n})}$ en exploitant une factorisation par l'angle moitié au dénominateur (et la parité des fonctions cos et sin dans la toute dernière étape de calcul). On en déduit donc que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n})}$.

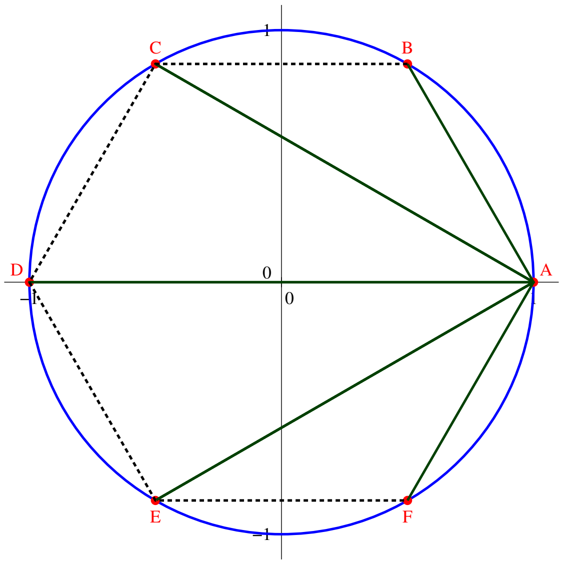
5. Il suffit de s'appuyer sur le fait que $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$, et donc que $\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = \cos\left(\dfrac{(n-k)\pi}{n}\right)$. Autrement dit, dans la somme des cosinus calculée à la question précédente, le terme numéro 1 s'annule avec le terme numéro $n-1$, le terme numéro 2 avec le terme numéro $n-2$ etc. Les seuls termes ne s'annulant pas sont le terme correspondant à $k = 0$, qui vaut $\cos(0) = 1$, et éventuellement (si n est un entier pair), le terme correspondant à $k = \dfrac{n}{2}$ (puisque dans ce cas $k = n - k$) mais on peut oublier ce terme puisqu'alors $\cos\left(\dfrac{n\pi}{2n}\right) = 0$. Il ne reste donc que 1 comme valeur de la somme, ce qui correspond bien au résultat obtenu précédemment.

6. Cette question n'a en fait pas grand chose à voir avec le reste de l'exercice (le rapport serait plus évident **sans** le carré dans la somme, on pourrait alors utiliser une factorisation par l'angle moitié pour se ramener à l'une des sommes calculées auparavant). Du coup, contentons-nous d'écrire que $a^{2k} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, et que $|a^{2k}-1|^2 = (a^{2k}-1)(\overline{a^{2k}}-1) = (a^{2k}-1)(a^{-2k}-1) = 2-(a^{2k}+a^{-2k}) = 2-2\cos\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$. Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = 0$ (on sait d'après le cours que la somme de toutes les racines n-èmes de l'unité est nulle, c'est exactement ce qu'on calcule ici). Il ne reste donc plus que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|a^{2k}-1|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} 2 = 2n$.

Les nombres a^{2k} représentant exactement les racines n-èmes de lunité lorsque k varie entre 0 et $n-1$, on a donc prouvé que la somme des carrés des distances de ces racines à 1 est égale à $2n$. Comme 1 est elle-même une racine n-ème de l'unité, on a en fait prouvé que, dans le polygone régulier représentant ces racines dans le plan complexe, la somme des carrés des distances de tous les sommets à un sommet fixé vaut toujours $2n$. Par exemple, pour $n = 4$, on sait que le polygone obtenu est un carré dont la longueur de la diagonale vaut 2, donc de côté $\sqrt{2}$ (si on préfère, le côté du carré est la distance entre 1 et i, qui vaut bien $\sqrt{2}$). Dans ce carré, la somme des carrés des distances des sommets à un sommet donné vaut deux fois le carré d'un côté, plus le carré d'une diagonale, donc $2 \times 2 + 4 = 8$, ce qui correspond bien à la valeur $2n$ calculée dans l'exercice. Dans l'illustration qui suit, on a $AB^2 + AC^2 + AD^2 = 8$:



Pour $n = 6$ on est dans un hexagone de « grande diagonale » de longueur 2, et la somme des carrés des distances des sommets à un sommet fixé vaut 12 (là aussi, le calcul se fait très bien à la main si on est un peu motivé). Dans la figure ci-dessous, on a donc $AB^2 + AC^2 + AD^2 + AE^2 + AF^2 = 12$:



Exercice 3

1. Posons donc $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+b+c}{3}\right) - \dfrac{\ln(x)+\ln(b)+\ln(c)}{3}$, la fonction f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ (il faut avoir $x > 0$ pour que le quotient de droite soit défini, et dans le cas le ln à gauche l'est aussi puisque x, b et c sont tous les trois strictement positifs), de dérivée $f'(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{x+b+c} - \dfrac{1}{3x} = \dfrac{3x-(x+b+c)}{3x(x+b+c)} = \dfrac{2x-(b+c)}{3x(x+b+c)}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, qui lui-même s'annule pour $x = \dfrac{b+c}{2}$, valeur en laquelle f admet un minimum. Calculons la valeur de ce minimum : $f\left(\dfrac{b+c}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{\frac{b+c}{2}+b+c}{3}\right) -$

$\dfrac{\ln(\frac{b+c}{2}) + \ln(b) + \ln(c)}{3} = \ln\left(\dfrac{b+c}{2}\right) - \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{b+c}{2}\right) - \dfrac{\ln(b)+\ln(c)}{3} = \dfrac{2}{3}\ln\left(\dfrac{b+c}{2}\right) - \dfrac{\ln(b)+\ln(c)}{3} = \dfrac{1}{3}\ln\left(\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2 \times \dfrac{1}{bc}\right) = \dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{b^2+2bc+c^2}{4bc}\right)$. Or, $b^2 + c^2 + 2bc - 4bc = b^2 + c^2 - 2bc = (b-c)^2 \geqslant 0$, ce qui prouve que $b^2 + c^2 + 2bc \geqslant 4bc$, et donc que $\dfrac{b^2+2bc+c^2}{4bc} \geqslant 1$ (tout est positif). Le minimum de la fonction f est donc positif, ce qui prouve que la fonction f elle-même ne prend que des valeurs positives. En particulier, $f(a) \geqslant 0$, ce qui prouve exactement que $\ln\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right) \geqslant \dfrac{\ln(a)+\ln(b)+\ln(c)}{3}$.

2. On peut réécrire le membre de gauche de l'inégalité précédente d'une autre façon (dans tous les calculs qui suivent, tout est positif, il ne risque pas d'y avoir de problème de signe) : $\dfrac{\ln(a)+\ln(b)+\ln(c)}{3} = \dfrac{\ln(abc)}{3} = \ln((abc)^{\frac{1}{3}}) = \ln(\sqrt[3]{abc})$, qui est donc inférieur ou égal à $\ln\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$. Un simple passage à l'exponentielle donne alors $\sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$. Comme $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$ et $\dfrac{1}{c}$ sont aussi trois réels strictement positifs, on peut leur appliquer cette même inégalité : $\sqrt{3}\dfrac{1}{abc} \leqslant \dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3}$. Le membre de gauche est simplement égal à $\dfrac{1}{\sqrt[3]{abc}}$, il suffit donc de passer à l'inverse en changeant le sens de l'inégalité pour obtenir l'inégalité de droite de l'encadrement demandé.

3. C'est une conséquence immédiate des questions précédentes : par une récurrence complètement immédiate, les termes des trois suites sont toujours strictement positifs (si on veut le prouver rigoureusement, on effectue une seule récurrence pour prouver simultanément la positivité des termes des trois suites), donc $a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant c_{n+1}$ en appliquant l'encadrement de la question 2 aux réels a_n, b_n et c_n. Par ailleurs, les inégalités sont également vraies pour $n = 0$ par hypothèse, donc sont valables pour tout entier naturel n.

4. Calculons donc : $a_1 = \dfrac{3}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \dfrac{12}{7}$; $b_1 = \sqrt[3]{8} = 2$ et $c_1 = \dfrac{7}{3}$. On remarque en passant que $a_1 > a_0$ et $c_1 < c_0$. Passons au troisième terme : $a_2 = \dfrac{3}{\frac{7}{12}+\frac{1}{2}+\frac{3}{7}} = \dfrac{3 \times 84}{49+42+36} = \dfrac{252}{127}$, nombre qui est très légèrement inférieur à 2 et en tout cas supérieur à a_1. Ensuite, $b_2 = \sqrt[3]{\dfrac{12}{7} \times 2 \times \dfrac{7}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$. Enfin, $c_2 = \dfrac{\frac{12}{7}+2+\frac{7}{3}}{3} = \dfrac{36+42+49}{63} = \dfrac{127}{63}$, nombre qui est légèrement supérieur à 2 et inférieur à c_1. Il semblerait donc que la suite (b_n) soit constante égale à 2 dans ce cas particulier, que (a_n) soit croissante et (c_n) décroissante, et que les trois suites aient une limite commune égale à 2.

5. Plutôt que de calculer bêtement $a_{n+1} - a_n$ (ce qui mène à des calculs pas forcément si simples), contentons-nous de signaler que $0 < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \Rightarrow \dfrac{1}{c_n} \leqslant \dfrac{1}{b_n} \leqslant \dfrac{1}{a_n}$. En particulier, $\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{b_n} + \dfrac{1}{c_n} \leqslant \dfrac{3}{a_n}$, donc en passant tout à l'inverse, $\dfrac{1}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}} \geqslant \dfrac{a_n}{3}$. Il suffit de tout multiplier par 3 pour obtenir $a_{n+1} \geqslant a_n$, ce qui prouve que la suite (a_n) est croissante. De même, $a_n + b_n + c_n \leqslant 3c_n$ donc $c_{n+1} \leqslant c_n$ en divisant tout par 3, ce qui prouve que la suite (c_n) est décroissante. On en déduit également que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant c_n \leqslant c_0$, donc la suite (a_n) est majorée par $c_0 = c$. Étant par ailleurs croissante, elle converge d'après le théorème de convergence monotone. Par un argument symétrique, (c_n) est décroissante minorée par $a_0 = a$, et converge donc également.

6. Notons l_a et l_c les limites respectives des suites (a_n) et (c_n). La relation de récurrence définissant la suite (c_n) peut s'écrire sous la forme $3c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$, ou encore $b_n = 3c_{n+1} - a_n - c_n$. Le membre de droite de cette dernière égalité convergeant vers $3l_c - l_a - l_c = 2l_c - l_a$, la suite

(b_n) converge donc vers cette valeur.

7. En notant l_b la limite de la suite (b_n), le calcul effectué à la question précédente prouve que $l_b = 2l_c - l_a$, c'està-dire que $l_a + l_b = 2l_c$. Or, on sait bien d'après les inégalités prouvées à la question 3 que $l_a \leqslant l_b \leqslant l_c$ (passage à le limite dans un encadrement). On ne peut donc avoir $l_a + l_b = 2l_c$ que si les trois limites sont effectivement égales.

Exercice 4

1. Calculons donc : $f(-i) = -i - \frac{1}{i} = -i + i = 0$; $f(1+i) = 1+i+\dfrac{1}{1+i} = 1+i+\dfrac{1-i}{2} = \dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i$; et enfin $f(e^{i\frac{2\pi}{3}}) = e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = -1$.
2. Il s'agit cette fois de résoudre l'équation $z + \dfrac{1}{z} = i$, soit $z^2 - iz + 1 = 0$ (la multiplication par z ne pose pas de problème puisque $z = 0$ ne peut pas être solution de l'équation). Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = -1 - 4 = -5$ et admet donc pour racines $z_1 = \dfrac{i - i\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}i$, et $z_2 = \dfrac{i + i\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}i$. Dans la mesure où Δ est ici réel, il est bien sûr inutile d'appliquer les méthodes compliquées vu en cours cette année.
3. L'application f ne peut certainement pas être injective puisqu'on vient de voir que le nombre i avait deux antécédents par f. Par contre, l'équation $f(z) = a$, qui se ramène à l'équation du second degré $z^2 - az + 1 = 0$, admet toujours des solutions complexes non nulles, ce qui prouve la sujectivité de f.
4. On calcule donc $f(a+ib) = a+ib+\dfrac{1}{a+ib} = a+ib+\dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \dfrac{a^3+ab^2+a+i(ba^2+b^3-b)}{a^2+b^2}$.
   Autrement dit, la partie réelle de $f(z)$ est égale à $\dfrac{a^3+ab^2+a}{a^2+b^2}$ et sa partie imaginaire est égale à $\dfrac{a^2b+b^3-b}{a^2+b^2}$.
5. On souhaite que $f(z) \in i\mathbb{R}$, c'est-à-dire que Re $(f(z)) = 0$. D'après la question précédente, celà revient à imposer la condition $a^3 + ab^2 + a = 0$, soit $a(a^2 + b^2 + 1) = 0$. Autrement dit, le nombre z doit être lui-même imaginaire pur ($a = 0$), l'équation $a^2 + b^2 + 1 = 0$ n'ayant aucune solution.
   De même $f(z)$ sera réel si Im $(f(z)) = 0$, donc si $a^2b+b^3-b = 0$ ou encore $b(a^2+b^2-1) = 0$. Cette fois-ci, le nombre z doit être lui-même réel ($b = 0$) ou appartenir à l'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 (l'équation $a^2+b^2 = 1$ étant celle du cercle trigonométrique). Je me dispense d'un petit dessin tant les résultats sont triviaux.
6. (a) On utilise évidemment la formule de récurrence double : $g_2(z) = z \times g_1(z) - g_0(z) = z^2 - 2$, puis $g_3(z) = z(z^2-2) - z = z^3 - 3z$; et enfin $g_4(z) = z(z^3-3z) - (z^2-2) = z^4 - 4z^2 + 2$.
   (b) L'équation $g_2(z) = 0$ est équivalente à $z^2 = 2$, et a donc pour solutions $z_1 = \sqrt{2}$ et $z_2 = -\sqrt{2}$.
   L'équation $g_3(z) = 0$ peut s'écrire sous la forme $z(z^2-3) = 0$ et a donc pour solutions $z_3 = 0$, $z_4 = \sqrt{3}$ et $z_5 = -\sqrt{3}$.
   Un peu plus de travail pour la dernière équation, on va résoudre $z^4 - 4z^2 + 2 = 0$ en posant $Z = z^2$ pour se ramener à l'équation du second degré $Z^2 - 4Z + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 16 - 8 = 8$, et admet donc pour racines $Z_1 = \dfrac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}$ et $Z_2 = \dfrac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$. Ces deux nombres étant des réels positifs, on en déduit sans difficulté les quatre solutions de l'équation $g_4(z) = 0$: $z_6 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$; $z_7 = -\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $z_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ et $z_9 = -\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

(c) On va procéder logiquement par récurrence double. Vérifions la propriété au rang 0 : $g_0(f(z)) = 2$ puisque la fonction g est constante égale à 2, et $f(z^0) = f(1) = 1 + 1 + 2$, donc l'égalité est bien vérifiée pour $n = 0$. Vérifions maintenant la propriété au rang 1 : $g_1(f(z)) = f(z) = z + \frac{1}{z}$, et $f(z^1) = f(z)$, donc la propriété reste vraie au rang 1. Supposons désormais que, pour un entier n fixé, on ait à la fois $g_n(f(z)) = f(z^n) = z^n + \frac{1}{z^n}$, et $g_{n+1}(f(z)) = f(z^{n+1}) = z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}$, alors la définition par récurrence des fonctions g_n permet d'écrire que $g_{n+2}(f(z)) = f(z) \times g_{n+1}(f(z)) - g_n(f(z)) = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - z^n - \frac{1}{z^n} = z^{n+2} + \frac{1}{z^n} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}} - z^n - \frac{1}{z^n} = z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}} = f(z^{n+2})$, ce qui est exactement ce qu'on souhait prouver. La propriété est doublement initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n.

(d) En posant $Z = z^n$, l'équation $f(z^n) = 0$ s'écrit très simplement sous la forme $Z + \frac{1}{Z} = 0$, soit $Z^2 + 1 = 0$ et donc $Z = \pm i$ (la multiplication par Z ne pose pas de problème, $Z = 0$ ne pouvant être solution de l'équation). Il reste donc à calculer les racines n-èmes des nombres i et $-i$. On écrit pour celà $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. En cherchant z sous sa forme exponentielle $z = re^{i\theta}$, on veut donc que $z^n = r^n e^{in\theta}$ soit égal à $e^{i\frac{\pi}{2}}$, ce qui se produira si module et arguments sont égaux (modulo 2π pour l'argument), donc si $r^n = 1$, ce qui implique $r = 1$, et $n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, soit $\theta \equiv \frac{\pi}{2n}\left[\frac{2\pi}{n}\right]$. Autrement dit, $z = e^{i(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n})}$, avec $k \in \{0, \dots, n-1\}$ De même, on aura $z^n = -i$ si $z = e^{-i(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n})}$, pour les mêmes valeurs de k. On peut en fait regrouper les deux conditions en remplaçant simplement dans la résolution de la première équation la condition sur les aguments par $n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ (on trouve ainsi à la fois le cas i et le cas $-i$), ce qui donne alors plus simplement $z_k = e^{i(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})}$, avec $k \in \{0, \dots, 2n-1\}$.
D'après la relation démontrée à la question précédente, les nombres de la forme $f(z_k)$ vérifieront $g_n(z) = 0$, puisque $f(z_k^n) = 0 \Rightarrow g_n(f(z_k)) = 0$. Calculons donc $f(z_k) = e^{i(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})} + e^{-i(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n})} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$. Ces nombres sont distincts lorsque k varie entre 0 et $n-1$ (les angles à l'intérieur du cosinus sont alors tous distincts et compris dans l'intervalle $[0, \pi]$), ce qui nous donne déjà n solutions distinctes de l'équation $g(z) = 0$. Par exemple, pour $n = 3$, on retrouve les valeurs $2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$; $2\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) = 0$ et $2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$ qu'on avait trouvées plus haut. Pour être certains que l'équation ne peut pas avoir d'autres solutions que celles-ci, on peut par exemple utiliser le fait que g_n est une fonction polynômiale de degré n (ce qui se prouve facilement par récurrence double), et donc ne peut pas s'annuler plus de n fois. Le calcul qu'on vient d'effectuer prouve en fait que toutes les racines de ce polynôme de degré n sont des nombres réels, et même qu'elles sont toutes comprises dans l'intervalle $[-2, 2]$ (puisqu'elles sont de la forme $2\cos(\alpha)$ pour un certain angle α).

(e) En notant donc $u_n = g_n\left(\frac{5}{2}\right)$ et en revenant à la définition récursive des fonctions g_n, on a la relation $u_{n+2} = \frac{5}{2}u_{n+1} - u_n$, qui est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique $r^2 - \frac{5}{2}r + 1$ admet pour discriminant $\Delta = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}$, et pour racines $r_1 = \frac{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 2$ et $r_2 = \frac{\frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2}$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = A \times 2^n + \frac{B}{2^n}$, où A et B sont deux constantes réelles. Les condition initiales vont nous permettre de déterminer ces constantes : $u_0 = g_0\left(\frac{5}{2}\right) = 2$, donc $A + B = 2$; et $u_1 = g_1\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}$, donc $2A + \frac{B}{2} = \frac{5}{2}$. Le système se résout assez trivialement puisqu'on obtient $A = B = 1$, donc $u_n = 2^n + \frac{1}{2^n}$. Autrement dit, on constate que $g_n\left(\frac{5}{2}\right) = f(2^n)$, ce qui est tout à fait cohérent avec le résultat de la question c et le fait que $\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2} = f(2)$.