Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 4

PTSI B Lycée Eiffel

14 décembre 2019

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (4-2i)z + 11 - 10i = 0$.
2. On note A et B les deux points du plan complexe ayant pour affixes les solutions obtenues à la question précédente. Déterminer les deux points (distincts) C et D pour lesquels les triangles ABC et ABD sont isocèles rectangles (en C et D respectivement). Quelle est la nature du quadrilatère $ACBD$? Faire une figure.
3. En notant M le point d'affixe z, déterminer plus généralement tous les nombres complexes z pour lesquels le triangle ABM est un triangle rectangle en M. On représentera géométriquement l'ensemble obtenu.
4. Où se situe le centre du cercle obtenu à la question précédente par rapport aux points A et B ? Que représente le rayon de ce même cercle ? Pourquoi ces résultats étaient-ils prévisibles ?

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul fixé pour tout l'exercice. On note $a = e^{i\frac{\pi}{n}}$.

1. Écrire a sous forme algébrique lorsque $n = 3$, $n = 4$ puis $n = 6$.
2. Dans le cas où $n = 4$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} a^k$ et vérifier que cette somme est égale à $\dfrac{2}{1-a}$.
3. Pour tout le reste de l'exercice, n est à nouveau un entier naturel non nul quelconque. On pose $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a^k$, montrer que $A = \dfrac{2}{1-a}$.
4. En exploitant le résultat de la question précédente, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
5. Expliquer pourquoi la première somme calculée à la question précédente était en fait égale à 1 de façon « évidente ».
6. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a^{2k} - 1|^2$. Interpréter géométriquement la somme calculée (en faisant intervenir des distances). On illustrera en particulier les résultats obtenus lorsque $n = 4$ (où on refera le calcul plus directement) et lorsque $n = 6$ (sans refaire de calcul).

Exercice 3

Soient a, b et c trois réels strictement positifs.

1. En posant $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+b+c}{3}\right) - \dfrac{\ln(x)+\ln(b)+\ln(c)}{3}$, étudier le signe de la fonction f, et en déduire qu'on a toujours $\dfrac{\ln(a)+\ln(b)+\ln(c)}{3} \leqslant \ln\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$.
2. En déduire que $\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leqslant \sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$.
3. On suppose $a < b < c$ et on définit trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) de la façon suivante : $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{3}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}+\frac{1}{c_n}}$; $b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n}$ et $c_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n+c_n}{3}$.
   Justifier qu'on a toujours $0 < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$.
4. Calculer les trois premiers termes de chaque suite lorsque $a = 1$, $b = 2$ et $c = 4$. Conjecturer la nature de chacune des suites.
5. Déterminer la monotonie des suites (a_n) et (c_n) et en déduire leur convergence.
6. Montrer que la suite (b_n) converge elle aussi.
7. Montrer que les limites des trois suites sont égales (on ne cherchera pas à calculer ces limites).

Exercice 4

On définit dans cet exercice une application $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ par $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.

1. Calculer l'image par f des nombres suivants : $z = -i$, $z = 1+i$, $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (on donnera à chaque fois le résultat sous forme algébrique).
2. Déterminer les antécédents éventuels du nombre i par l'application f.
3. L'application f est-elle injective ? Surjective ?
4. En posant $z = a + ib$ déterminer en fonction de a et de b les parties réelle et imaginaire du nombre $f(z)$.
5. Déterminer les nombres complexes z pour lesquels $f(z) \in i\mathbb{R}$, et ceux pour lesquels $f(z) \in \mathbb{R}$ (on fera à chaque fois une interprétation géométrique du résultat).
6. On définit désormais une suite de fonctions g_n (sur $\mathbb{C}$) par récurrence de la façon suivante : $g_0(z) = 2$, $g_1(z) = z$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_{n+2}(z) = z \times g_{n+1}(z) - g_n(z)$.
   (a) Calculer une expression explicite de $g_2(z)$, de $g_3(z)$, puis de $g_4(z)$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $g_2(z) = 0$, $g_3(z) = 0$ puis $g_4(z) = 0$.
   (c) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $g_n(f(z)) = f(z^n)$.
   (d) Résoudre l'équation $f(z^n) = 0$, et en déduire les solutions de l'équation $g_n(z) = 0$, en précisant le nombre de solutions de cette équation.
   (e) Calculer la valeur de $g_n\left(\dfrac{5}{2}\right)$ (qu'on notera u_n pour les calculs) en utilisant la définition par récurrence des fonctions g_n, puis vérifier que le résultat obtenu est cohérent avec la formule prouvée à la quesion c.