Devoir Surveillé n° 3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

23 novembre 2019

Exercice 1

1. Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants écrivons donc son équation caractéristique $r^2+r-2=0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 1+8=9$ et pour racines (réelles) $r_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -2$ et $r_2 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$, les solutions de l'équation homogène associée à (E_1) sont donc les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ae^{-2x} + Be^x$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
Commes le second membre est un polynôme de degré 1 multiplié par une exponentielle solution de l'équation homogène, nous allons chercher une solution particulière de (E_1) sous la forme $y_p(x) = (ax^2+bx+c)e^x$. On calcule $y_p'(x) = (2ax+b)e^x+(ax^2+bx+c)e^x = (ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x$, puis $y_p''(x) = (2ax+2a+b)e^x+(ax^2+(2a+b)x+b+c)e^x = (ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c)e^x$. En simplifiant tout par e^x (qui ne s'annule de toute façon jamais), y_p est donc solution de (E_1) si $ax^2+(4a+b)x+2a+2b+c+ax^2+(2a+b)x+b+c-2ax^2-2bx-2c = 2x-1$, soit $6ax+2a+3b = 2x-1$. Une identification donne immédiatement $a = \dfrac{1}{3}$ et $2a+3b=-1$, soit $b = -\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}a = -\dfrac{5}{9}$. La solution particulière recherchée (on peut prendre $c=0$) est donc la fonction $y_p : x \mapsto \left(\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{5}{9}x\right)e^x$, et les solutions de l'équation (E_1) sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ae^{-2x} + \left(\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{5}{9}x + B\right)e^x$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
Les condition initiales données devraient imposer une solution unique. La première condition $y(0) = 2$ impose $A+B=2$, et on dérive pour pouvoir exploitrer la deuxième condition : $y'(x) = -2Ae^{-2x} + \left(\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{5}{9}x + B + \dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{9}\right)e^x$, donc $y'(0) = -2A+B-\dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9}$, ce qui revient à dire que $-2A+B=1$. En soustrayant les deux conditions obtenues, on trouvé immédiatement $3A=1$, donc $A = \dfrac{1}{3}$, puis $B = 2-A = \dfrac{5}{3}$. L'unique solution cherchée est donc la fonction $y : x \mapsto \dfrac{1}{3}e^{-2x} + \left(\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{5}{9}x + \dfrac{5}{3}\right)e^x$.
2. Il s'agit d'intégrer une fraction rationnelle, on utilise donc la méthode habituelle :
   - factorisation du dénominateur : le trinôme $2x^2-3x-2$ a pour discriminant $\Delta = 9+16 = 25$ et admet pour racines $x_1 = \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+5}{4} = 2$. On n'oublie pas le coefficient dominant égal à 2 quand on factorise : $2x^2-3x-2 = (2x+1)(x-2)$.
   - décomposition en éléments simples : on chercher deux constantes réelles a et b telles que $\dfrac{5x}{2x^2-3x-2} = \dfrac{a}{2x+1} + \dfrac{b}{x-2}$, par exemple par identification (on peut bien sûr aussi utiliser les méthodes plus astucieuses vues en cours) : $\dfrac{a}{2x+1} + \dfrac{b}{x-2} = \dfrac{a(x-2)+b(2x+1)}{(2x+1)(x-2)} = \dfrac{(a+2b)x+b-2a}{2x^2-3x-2}$. Par identification des coefficients du numérateur, on doit donc avoir $a+2b=5$ et $b-2a=0$, soit $b=2a$ et $a=1$, donc $b=2$. Finalement $\dfrac{5x}{2x^2-3x-2} =$

$\dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{2}{x-2}$.

- calcul de l'intégrale : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x+1} + \frac{2}{x-2}\ dx = \left[\frac{1}{2}\ln(2x+1) + 2\ln(2-x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(3) - 2\ln(2)$.

3. Effectuer le changement de variable $t = \ln(x)$ (ou $x = e^t$) revient à poser $y(x) = z(t) = z(\ln(x))$. On dérivé deux fois cette égalité par rapport à la variable x : $y'(x) = \dfrac{1}{x}z'(\ln(x))$, puis $y''(x) = -\dfrac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \dfrac{1}{x^2}z''(\ln(x))$. On peut maintenant tout remplacer dans l'équation (E_2) pour obtenir l'équation équivalente $-z'(\ln(x)) + z''(\ln(x)) - 2z'(\ln(x)) + 2z(\ln(x)) = \dfrac{1}{x} + \sin(\ln(x))$, soit $z''(t) - 3z'(t) + 2z(t) = e^{-t} + \sin(t)$.
Cette équation du second ordre à coefficients constants admet pour équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$ et pour solutions $r_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1$ et $r_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$. Les solutions de l'équation homogène associée sont donc de la forme $z_h : t \mapsto Ae^{2t} + Be^t$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
En appliquant le principe de superposition cherchons désormais une solution particulière de l'équation $z'' - 3z' + 2z = e^{-t}$ sous la forme $z_{p_1}(t) = Ke^{-t}$. Un calcul passablement trivial montre que z_{p_1} est solution si $(K + 3K + 2K)e^{-t} = e^{-t}$, donc si $k = \dfrac{1}{6}$. Autrement dit, $z_{p_1}(t) = \dfrac{1}{6}e^{-t}$.
Cherchons maintenant une solution complexe à l'équation $z'' - 3z' + 2z = e^{it}$ sous la forme $z_c(t) = Le^{it}$ (comme Im $(e^{it}) = \sin(t)$ et que l'équation est linéaire, la partie imaginaire de $z_c(t)$ fournira une solution particulière de l'équation $z'' - 3z' + 3z = \sin(t)$). La encore, un calcul trivial donne comme condition $(-L - 3iL + 2L)e^{it} = e^{it}$, soit $L = \dfrac{1}{1-3i} = \dfrac{1+3i}{10}$. Autrement dit, $z_c(t) = \dfrac{1+3i}{10}e^{it}$, donc Im $(z_c(t)) = \dfrac{1}{10}\sin(t) + \dfrac{3}{10}\cos(t)$.
Il ne reste plus qu'à recoller les morceaux : les solutions de l'équation équivalente à (E_2) sont les fonctions $z : t \mapsto Ae^{-2t} + Be^t + \dfrac{1}{6}e^{-t} + \dfrac{1}{10}\sin(t) + \dfrac{3}{10}\cos(t)$. On achève en remontant le changement de variables : $y(x) = z(\ln(x)) = Ae^{-2\ln(x)} + Be^{\ln(x)} + \dfrac{1}{6}e^{-\ln(x)} + \dfrac{1}{10}\sin(\ln(x)) + \dfrac{3}{10}\cos(\ln(x))$, soit $y(x) = \dfrac{A}{x^2} + Bx + \dfrac{1}{6x} + \dfrac{1}{10}\sin(\ln(x)) + \dfrac{3}{10}\cos(\ln(x))$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2

1. On peut normaliser cette équation linéaire du premier ordre pour la mettre sous la forme $y' - \dfrac{2}{x}y = 1$. La fonction $x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ est définie et continue sur I donc y admet des primitives. L'une d'elles étant $x \mapsto -2\ln(x)$, les solutions de l'équation homogène associée à l'équation qu'on nous demande de résoudre sont de la forme $y_h : x \mapsto Ke^{2\ln(x)} = Kx^2$, avec $K \in \mathbb{R}$.
Reste à trouver une solution particulière de l'équation, qu'on va chercher sous la forme $y_p : x \mapsto K(x)x^2$ (méthode de variation de la constante). On aura donc $y_p'(x) = K'(x)x^2 + 2xK(x)$, et y_p sera solution de notre équation complète si et seulement si $K'(x)x^2 + 2xK(x) - 2K(x)x = 1$, c'est-à-dire si $K'(x) = \dfrac{1}{x^2}$. On peut donc choisir $K(x) = -\dfrac{1}{x}$, ce qui revient à dire que $y_p(x) = -x$. Toutes les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions de la forme $y : x \mapsto Kx^2 - x$, avec $K \in \mathbb{R}$.
Étudions le signe de ces solutions sur l'intervalle $]0, +\infty[$: si $K \leqslant 0$, pas grand chose à signaler, la fonction y est tout le temps négative (et en particulier n'est pas toujours strictement positive

puisqu'elle ne l'est jamais !). Si $K > 0$, la fonction est continue et s'annule lorsque $Kx^2 - x = 0$, donc pour $x = \dfrac{1}{K}$ (qui appartient bien à I puisqu'on a supposé $K > 0$). La fonction est alors négative sur $\left]0, \dfrac{1}{K}\right]$, et donc pas non plus strictement positive sur I.

2. On utilise bien sûr la même méthode qu'à la question précédente : la normalisation donne cette fois l'équation équivalente $y' + \dfrac{2}{x}y = 1$, et les solutions de l'équation homogène sont de la forme $y_h : x \mapsto Le^{-2\ln(x)} = \dfrac{L}{x^2}$, avec $L \in \mathbb{R}$. On cherche à nouveau une solution particulière via variation de la constante : $y_p(x) = \dfrac{L(x)}{x^2}$, donc $y_p'(x) = \dfrac{x^2L'(x) - 2xL(x)}{x^4} = \dfrac{xL'(x) - 2L(x)}{x^3}$, et y_p est solution de notre équation complète si $\dfrac{xL'(x) - 2L(x)}{x^3} + \dfrac{2L(x)}{x^3} = 1$, soit $\dfrac{L'(x)}{x^2} = 1$. On doit donc avoir $L'(x) = x^2$, ce qui sera le cas en prenant par exemple $L(x) = \dfrac{x^3}{3}$, ce qui donne $y_p(x) = \dfrac{x}{3}$. Les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions de la forme $y : x \mapsto \dfrac{L}{x^2} + \dfrac{x}{3}$, avec $L \in \mathbb{R}$.
Ces fonctions sont toujours positives sur I si $L \geqslant 0$, et dans le cas où $L < 0$, elles s'annulent lorsque $\sqrt[3]{-3L}$ (nombre qui est bien positif) et sont positives après avoir passé cette valeur. En particulier, aucune solution de l'équation n'est toujours strictement négative (une autre façon de prouver les choses est de constater que toutes ces solutions ont une limite égale à $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ce qui est difficilement possible pour une fonction strictement négative).

3. (a) Puisque y_0 est solution de l'équation (E), elle vérifie $y_0' - \dfrac{2}{x}|y_0| = 1$, ou encore $y_0' = \dfrac{2}{x}|y_0| + 1$. Autrement dit, on a a toujours $y_0' \geqslant 1$ sur l'intervalle I, ce qui suffit évidemment à assurer la stricte croissance de y_0.

   (b) Supposons donc que y_0 soit toujours de même signe sur l'intervalle I. Si elle est toujours strictement positive sur I, alors on a toujours $|y_0| = y_0$, et y_0 est donc solution sur I de l'équation $xy' - 2y = 1$, tout en étant toujours strictement positive. C'est impossible d'après la question 1. De même, si y_0 était strictement négative sur tout l'intervalle I, elle serait solution sur tout cet intervalle de l'équation $xy' + 2y = 1$ tout en étant strictement négative, ce qui est impossible d'après la question 2. La fonction y_0 s'annule donc nécessairement sur l'intervalle I.

   (c) La fonction y_0 étant strictement croissante et continue sur I, elle est bijective de I vers un intervalle contenant 0 (puisque la question précédente a prouvé que y_0 s'annulait nécessairement sur I). L'équation $y_0(x) = 0$ ne peut donc avoir qu'une seule solution.

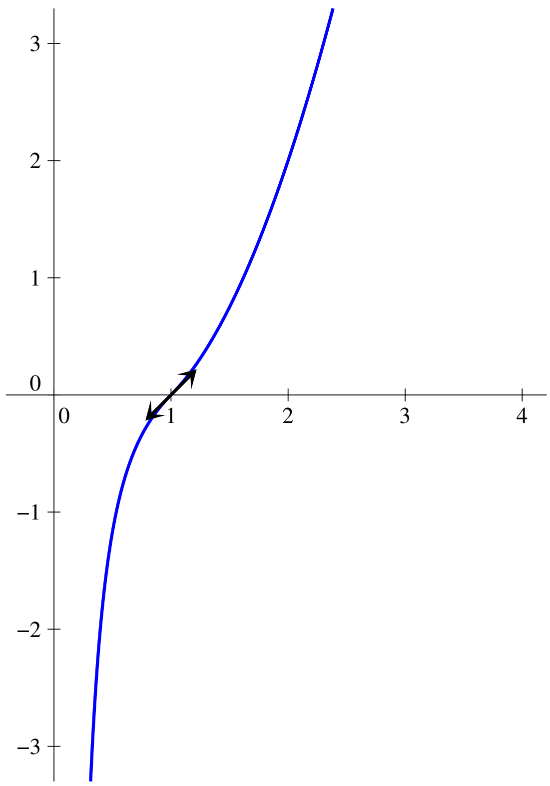
   (d) La fonction y_0 étant strictement croissante, elle sera négative sur l'intervalle $]0, x_0[$. Elle est donc solution sur cet intervalle de l'équation $xy' + 2y = x$, et donc de la forme $y_0(x) = \dfrac{L}{x^2} + \dfrac{x}{3}$ sur cet intervalle (qui est inclus dans l'intervalle I). Comme elle doit par ailleurs vérifier $y_0(x_0) = 0$, on doit avoir $\dfrac{L}{x_0^2} + \dfrac{x_0}{3} = 0$, soit $L = -\dfrac{x_0^3}{3}$ (l'expression de la fonction reste valable pour $x = x_0$ par continuité de la fonction y_0). Autrement dit, sur l'intervalle $]0, x_0[$, on aura $y_0(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{x_0^3}{3x^2} = \dfrac{x^3 - x_0^3}{3x^2}$. On procède de même sur l'intervalle $]x_0, +\infty[$: la fonction y_0 y est positive donc solution de l'équation $xy' - 2y = x$, et donc de la forme $y_0(x) = Kx^2 - x$. L'annulation de la fonction en x_0 impose $K = \dfrac{1}{x_0}$ et donne donc la formule attendue $y_0(x) = \dfrac{x^2}{x_0} - x$.

4. (a) Par définition, $y_0(1) = 0$, donc en remplaçant x par 1 dans l'équation (E) on doit avoir $y'(1) = 1$. On peut bien sûr aussi reprendre les deux expressions obtenues à la question précédente : sur $]0,1]$, on a $y_0(x) = \dfrac{x^3-1}{3x^2}$, donc $y_0'(x) = \dfrac{9x^4 - 6x(x^3-1)}{9x^4} = \dfrac{x^3+2}{3x^3}$, dont on déduit que la dérivée à gauche de la fonction y_0 en 1 vaut 1 (attention, l'expression n'étant valable que sur un intervalle dont 1 est la borne supérieure, on ne peut rien en déduire pour l'instant sur ce qui se passera à droite de 1, et donc sur la dérivabilité de y_0 en 1). De même, sur $[1,+\infty[$, $y_0(x) = x^2 - x$, donc $y_0'(x) = 2x - 1$, ce qui donne une dérivée à droite en 1 égale à 1. Les dérivées à gauche et à droite de y_0 en 1 étant égales, la fonction y_0 est bien dérivable en 1, et $y_0'(1) = 1$.

   (b) En utilisant les expressions rappelées à la question précédente, on calcule sans aucune difficulté $\lim\limits_{x\to 0} y_0(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} y_0(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x = +\infty$. De plus, on a, sur l'intervalle $[1,+\infty[$, $\dfrac{y_0(x)}{x} = x - 1$, ce qui implique évidemment que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y_0(x)}{x} = +\infty$ (ce dernier calcul de limite prouve techniquement que la courbe représentative qu'on tracera un peu plus loin ne peut pas avoir d'asymptote oblique en $+\infty$, car la fonction y_0 croît plus vite que n'importe quelle fonction affine ; on parle techniquement de branche parabolique de direction (Oy), mais ce genre d'étude n'est pas à votre programme).

   (c) On peut bien sûr partir des expressions obtenues plus haut pour y_0' sur chaque intervalle : sur $]0,1[$, $y_0(x) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3x^3}$, donc $y_0''(x) = -\dfrac{2}{x^4}$, expression qui est bien entendue strictement négative sur tout l'intervalle $]0,1[$. Sur $]1,+\infty[$, on aura cette fois $y_0'(x) = 2x - 1$, donc tout simplement $y_0''(x) = 2$, ce qui est strictement positif. Remarquons en passant que la fonction y_0 n'est pas dérivable deux fois sur tout l'intervalle I, car les limites distinctes de y_0'' à gauche et à droite quand x tend vers 1 empêchent y_0' d'être dérivable en 1.

   (d) Voici une allure de courbe, avec la tangente de pente 1 au point d'annulation :



Problème : sur les intégrales de Wallis et l'intégrale de Gauss

I. Étude des intégrales de Wallis.

1. On commence gentiment : $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dt = \frac{\pi}{2}$.

   On continue tout aussi trivialement : $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\ dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$.

   Pour la troisième, on peut utiliser la formule de duplication $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$ pour en déduire que $\cos^2(t) = \dfrac{\cos(2t)+1}{2}$, donc $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2}\ dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.

2. Puisqu'on nous le propose si gentiment, calculons donc I_{n+2} à l'aide d'une IPP en posant $u(t) = \cos^{n+1}(t)$, donc $u'(t) = -(n+1)\cos^n(t)\sin(t)$; et $v'(t) = \cos(t)$ pour lequel on peut prendre $v(t) = \sin(t)$ (les deux fonctions u et v sont sans problème de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle d'intégration). On obtient alors $I_{n+2} = \left[\cos^{n+1}(t)\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos^n(t)\sin^2(t)\ dt$. Le crochet s'annule, et on peut bien sûr écrire $\sin^2(t) = 1 - \cos^2(t)$ dans le terme restant pour obtenir $I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) - \cos^{n+2}(t)\ dt = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. Autrement dit, on aura $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$, ce qui donne bien la relation $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.

   On en déduit aisément, en prenant $n = 1$ puis $n = 2$, que $I_3 = \dfrac{2}{3}I_1 = \dfrac{2}{3}$, et $I_4 = \dfrac{3}{4}I_2 = \dfrac{3\pi}{16}$.

3. Nous allons donc effectuer une récurrence. Au rang $n = 0$, on a bien $\dfrac{0!}{2^0 \times 0!^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} = I_0$, donc la propriété est vraie.

   Supposons désormais la formule vérifiée au rang n, alors d'après la question précédente et l'hypothèse de récurrence, $I_{2n+2} = \dfrac{2n+1}{2n+2}I_n = \dfrac{2n+1}{2n+2} \times \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{(2n+1)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!} \times \dfrac{\pi}{2}$.

   On multiplie en haut et en bas par $2n+2 = 2(n+1)$ et on trouve $I_{2n+2} = \dfrac{(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!^2} \times \dfrac{\pi}{2}$, ce qui est exactement la formule souhaitée au rang $n+1$. La formule est donc héréditaire, et vraie pour tout entier naturel n.

4. Cette deuxième récurrence est encore plus simple : au rang 0, on a $1 \times I_0 \times I_1 = \dfrac{\pi}{2}$ d'après les calculs de la première question, et en supposant la formule vraie au rang n, alors d'après le résultat de la question 2, $(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+2)I_{n+1}\dfrac{n+1}{n+2}I_n = (n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

II. Calcul de l'intégrale de Gauss.

1. Par définition, f est la primitive s'annulant en 0 de la fonction (continue) $u \mapsto e^{-u^2}$, donc f est dérivable, et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x^2}$. En particulier, cette dérivée étant toujours positive, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. On pose classiquement $g(x) = e^x - 1 - x$. La fonction g est bien sûr définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = e^x - 1$. Cette dérivée est négative sur $]-\infty, 0]$ et positive sur $[0, +\infty[$, donc g admet un minimum sur $\mathbb{R}$ de valeur $g(0) = 1 - 1 - 0 = 0$. En particulier, la fonction g est donc toujours positive, exactement ce qu'on cherchait à prouver.

3. Appliquons tout d'abord la majoration de la question précédente au nombre $x = -\dfrac{u^2}{n}$ pour obtenir $1 - \dfrac{u^2}{n} \leqslant e^{-\frac{u^2}{n}}$. Comme on a supposé $0 \leqslant u \leqslant \sqrt{n}$, on a $1 - \dfrac{u^2}{n} \geqslant 0$, on peut donc élever l'inégalité précédente à la puissance n sans avoir à changer son sens, ce qui donne exactement l'inégalité de gauche de l'encadrement demandé. Pour celle de droite, on pose

cette fois $x = \dfrac{u^2}{n}$, puis on élève de même à la puissance n (encore une fois, tout est positif) pour trouver $\left(1 + \dfrac{u^2}{n}\right)^n \leqslant e^{u^2}$, et on passe enfin à l'inverse cette minoration, en changeant bien sûr le sens de l'inégalité, ce qui donne la deuxième moitié de l'encadrement souhaité en utilisant le fait que $\dfrac{1}{e^{u^2}} = e^{-u^2}$.

4. Effectuons donc le changement de variable demandé $u = \sqrt{n}\sin(t)$ (ou si on préfère $t = \arcsin(\frac{u}{\sqrt{n}})$. Les bornes de l'intégrale deviennent alors $\arcsin(0) = 0$ et $\arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$. L'expression à l'intérieur de l'intégrale devient $\left(1 - \dfrac{u^2}{n}\right)^n = (1 - \sin^2(t))^n = \cos^{2n}(t)$, et enfin l'élément différentiel vérifie $du = \sqrt{n}\cos(t)\ dt$, ce qui permet d'écrire que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{u^2}{n}\right)^n\ du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}\cos^{2n+1}(t)\ dt = \sqrt{n}I_{2n+1}$.
5. Même principe en posant $u = \sqrt{n}\tan(t)$ (ou encore $t = \arctan(\frac{u}{\sqrt{n}})$) : les bornes deviennent $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$, l'expression dans l'intégrale se transforme en $\dfrac{1}{(1 + \tan^2(t))^n} = \cos^{2n}(t)$ en utilisant l'égalité $\dfrac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$ (formules de dérivation de la fonction tangente). Enfin, l'élément différentiel vérifie cette fois $du = \sqrt{n}(1+\tan^2(t))\ dt = \sqrt{n} \times \dfrac{1}{\cos^2(t)}\ dt$. On en déduit effectivement que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n}\ du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(t)\ dt$.
6. L'encadrement de la question 3 étant justement valable sur l'intervalle $[0, \sqrt{n}]$ sur lesquel on souhaite intégrer, tout va bien, et les formules des questions 4 et 5, nous assurent alors que $\displaystyle\sqrt{n}I_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\ du \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(t)\ dt$. Attention, les bornes de la dernière intégrale ne sont pas tout à fait les bonnes pour pouvoir conclure directement, mais ce n'est pas gênant : la fonction $\cos^{2n-2}$ étant certainement positive sur $\mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(t)\ dt$ est positive, donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(t)\ dt \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}\cos^{2n-2}(t)\ dt$, ce qui nous permet d'obtenir l'encadrement souhaité.
7. Commençons par calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_{2n+1}$. On sait d'après l'énoncé que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, ce qui implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1}I_{2n+1} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. Il suffit alors d'écrire $\sqrt{n}I_{2n+1} = \sqrt{2n+1}I_{2n+1} \times \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}$ pour en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_{2n+1} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \times \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Un calcul identique prouve de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_{2n-1} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Il ne reste plus alors qu'à appliquer à l'encadrement de la question précédente le théorème des gendarmes pour en déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\ du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, soit $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.