Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 3

PTSI B Lycée Eiffel

23 novembre 2019

Exercice 1

Les trois questions de ce premier exercice sont indépendantes.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E_1) : y'' + y' - 2y = (2x-1)e^x$. Donner l'unique solution de (E_1) vérifiant les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = \dfrac{4}{9}$.
2. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{5x}{2x^2 - 3x - 2}\, dx$.
3. Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : x^2y'' - 2xy' + 2y = \dfrac{1}{x} + \sin(\ln(x))$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, en effectuant le changement de variable $t = \ln(x)$.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation différentielle non linéaire $(E) : xy' - 2|y| = x$ sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$.

1. Résoudre sur I l'équation $xy' - 2y = x$ (sans valeur absolue cette fois !), et vérifier qu'aucune de ses solutions n'est strictement positive sur tout l'intervalle I.
2. Résoudre de même sur I l'équation $xy' + 2y = x$ et vérifier qu'aucune de ses solutions n'est strictement négative sur tout l'intervalle I.
3. On note désormais y_0 une solution de l'équation (E) sur tout l'intervalle I.
   (a) Montrer que y_0 est strictement croissante sur I.
   (b) En exploitant les questions précédentes, montrer que y_0 ne peut pas garder un signe strictement constant sur I.
   (c) En déduire qu'il existe un unique réel $x_0 > 0$ tel que $y_0(x_0) = 0$.
   (d) Montrer enfin que, $\forall x \in]0, x_0]$, $y_0(x) = \dfrac{x^3 - x_0^3}{3x^2}$, et que, $\forall x \in [x_0, +\infty[$, $y_0(x) = \dfrac{x^2}{x_0} - x$.
4. On s'intéresse dans cette question à la solution y_0 vérifiant $x_0 = 1$. On pourra bien sûr reprendre les expressions de la question 3.d même si on n'a pas réussi à les démontrer rigoureusement.
   (a) Que vaut dans ce cas $y_0'(1)$?
   (b) Déterminer les limites de y_0 aux bornes de son intervalle de définition, ainsi que la valeur de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{y_0(x)}{x}$.
   (c) Calculer la dérivée seconde $y_0''(x)$ (en distinguant deux intervalles), et préciser son signe.
   (d) Tracer une allure de la courbe représentative de y_0 tenant compte de tous les calculs effectués ci-dessus. On rappelle qu'une fonction dont la dérivée seconde est négative est **concave** (courbe tournée « vers le bas » comme celles des fonctions racine carrée ou ln).

Problème : sur les intégrales de Wallis et l'intégrale de Gauss.

I. Étude des intégrales de Wallis.

Les intégrales de Wallis sont les intégrales définies par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\ dt$, où $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les valeurs des intégrales I_0, I_1 et I_2.
2. À l'aide d'une intégration par parties, prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$ (on pourra par exemple écrire que $\cos^{n+2}(t) = \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)$). En déduire les valeurs de I_3 et de I_4.
3. Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
4. Prouver par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1) I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

On **admet** pour la suite de l'exercice que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

II. Calcul de l'intégrale de Gauss.

On pose, pour tout réel x, $f(x) = \int_0^x e^{-u^2}\ du$ (on ne cherchera **jamais** à calculer explicitement $f(x)$).

1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée. Donner les variations de f. On **admet** que f admet une limite finie en $+\infty$ qu'on notera abusivement $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du$.
2. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant e^x$.
3. En déduire l'encadrement $\forall u \in [0, \sqrt{n}]$, $\left(1 - \dfrac{u^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-u^2} \leqslant \dfrac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n}$.
4. À l'aide du changement de variables $u = \sqrt{n}\sin(t)$, montrer que, si $n \geqslant 1$,
$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \dfrac{u^2}{n}\right)^n\ du = \sqrt{n} I_{2n+1}$.
5. À l'aide du changement de variables $u = \sqrt{n}\tan(t)$, montrer que, si $n \geqslant 1$,
$\int_0^{\sqrt{n}} \dfrac{1}{(1 + \frac{u^2}{n})^n}\ du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{n} \cos^{2n-2}(t)\ dt$.
6. On donne le théorème suivant : si deux fonctions continues f et g sont telles que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx$.
Déduire de ce théorème et des questions précédentes l'encadrement
$\sqrt{n} I_{2n-1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2}\ du \leqslant \sqrt{n} I_{2n-2}$.
7. En déduire rigoureusement la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ du$.