Devoir Surveillé n° 2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

12 octobre 2019

Exercice 1

1. Calculons donc : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)(2j+1)}{6} = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n} 2j^3+3j^2+j = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n} j^3 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{3}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{6}\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n^2+n+2n+1+2)}{12} = \frac{n(n+1)(n^2+3n+2)}{12}$. Or, le dernier facteur du numérateur peut encore se factoriser : il a pour discriminant $\Delta = 9-8 = 1$ et admet pour racines $n_1 = \dfrac{-3-1}{2} = -2$ et $n_2 = \dfrac{-3+1}{2} = -1$, donc $n^2+3n+2 = (n+1)(n+2)$ et on a finalement $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^2 = \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$.
2. Il s'agit donc de résoudre l'équation $e^x+e^{-x} = 4$, ou encore $e^{2x}+1 = 4e^x$ (la multiplication par e^x qui ne peut jamais s'annuler transforme l'équation en une équation équivalente). On pose $X = e^x$ pour sa ramener à l'équation du second degré X^2-4X+1, qui a pour discriminant $\Delta = 16-4 = 12$, et admet deux racines réelles $X_1 = \dfrac{4-\sqrt{12}}{2} = 2-\sqrt{3}$, et $X_2 = \dfrac{4+\sqrt{12}}{2} = 2+\sqrt{3}$. Ces deux valeurs étant strictement positives (car $\sqrt{3} < 2$), l'équation initiale a donc deux solutions : $x = \ln(2-\sqrt{3})$ et $x = \ln(2+\sqrt{3})$. En fait, la connaissances des variations et de la parité de la fonction ch permettait d'anticiper avant même de commencer la résolution de l'équation que celle-ci aurait deux solutions opposées l'une de l'autre. On peut le vérifier : $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2^2-3} = 2-\sqrt{3}$, donc $\ln(2-\sqrt{3}) = \ln\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right) = -\ln(2+\sqrt{3})$.
3. Un calcul en fait très simple : $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{j} j = \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2+k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.
4. Plusieurs méthodes possibles, mais la plus simple consiste à utiliser directement les formules de duplication et de triplication du sinus : $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x) = \sin(x)+2\sin(x)\cos(x)+3\sin(x)-4\sin^3(x) = \sin(x)(4+2\cos(x)-4\sin^2(x)) = \sin(x)(2\cos(x)+4\cos^2(x))$ en appliquant simplement pour la dernière étape $\sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$. L'équation de départ est donc vérifiée si $\sin(x) = 0$ ou $\cos(x) = 0$ ou $\cos(x) = -\dfrac{1}{2}$. Les deux conditions peuvent être regroupées, elle sont vérifiées si $x \equiv 0\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$. La dernière condition donne les solutions supplémentaires $x \equiv \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ et $x \equiv -\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$.
5. Notons pour simplifier le calcul $\theta = \arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)$ (θ est donc un angle compris entre 0 et

$\frac{\pi}{2}$). On cherche donc à calculer $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, que nous noterons (là aussi pour simplifer) α. Les formules de duplications nous assurent que $\cos(\theta) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 1 - 2\alpha^2$. Utilisons enfin la relation classique $1 - \cos^2(\theta) = \sin^2(\theta)$ pour en déduire que $1 - (1 - 2\alpha^2)^2 = \sin^2(\theta) = \frac{1}{9}$ (puisque, par définition de θ, $\sin(\theta) = \frac{1}{3}$). On a donc $(1 - 2\alpha^2)^2 = \cos^2(\theta) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Or, $\cos(\theta) > 0$ puisque $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(\theta) = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. On en déduit maintenant que $2\alpha^2 = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3}$, et comme α est lui aussi positif en tant que sinus d'un angle compris entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, on a enfin $\alpha = \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}}$. On peut chercher à simplifier un peu l'écriture de ce nombre, mais ça n'a pas grand intérêt.

Exercice 2

1. Il s'agit d'une simple somme télescopique : $\sum_{i=0}^{n} f(i+1) - f(i) = \sum_{i=1}^{n+1} f(i) - \sum_{i=0}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n} f(i) + f(n+1) - f(0) - \sum_{i=1}^{n} f(i) = f(n+1) - f(0)$.

2. Calculons donc $f(x+1) = \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{6}(x+1) = \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + \frac{1}{6}(x+1) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$. Si on soustrait $f(x)$, on obtient bien $f(x+1) - f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x = x^2$.

3. En combinant les deux calculs précédents, $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \sum_{i=0}^{n} f(i+1) - f(i) = f(n+1) - f(0)$. Comme $f(0) = 0$, on obtient bien $\sum_{i=0}^{n} i^2 = f(n+1) = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}(n+1) = \frac{(n+1)[2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 3 + 1}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. On reconnait bien la formule vue en cours.

4. Avec l'expression imposée par l'énoncé, $g(x+1) - g(x) = a(x+1)^4 + b(x+1)^3 + c(x+1)^2 + d(x+1) - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx = a(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + b(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + c(x^2 + 2x + 1) + d(x+1) - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx = 4ax^3 + (6a + 3b)x^2 + (4a + 3b + 2c)x + a + b + c + d$. Si on veut que cette expression soit toujours égale à x^3, une identification impose les conditions successives suivantes : $4a = 1$, donc $a = \frac{1}{4}$; puis $6a + 3b = 0$, donc $b = -2a = -\frac{1}{2}$; puis $4a + 3b + 2c = 0$, donc $c = -2a - \frac{3}{2}b = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$; et enfin $a + b + c + d = 0$, donc $d = -a - b - c = 0$. Finalement, on trouve que $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$.

5. C'est exactement comme au-dessus : $\sum_{i=0}^{n} i^3 = g(n+1) - g(0) = \frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{1}{2}(n+1)^3 + \frac{1}{4}(n+1)^2 = \frac{(n+1)^2[(n+1)^2 - 2(n+1) + 1]}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 + 1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Encore une fois, on retrouve sans problème la formule bien connue.

6. Puisqu'on nous donne la formule, contentons-nous d'achever le calcul : $\sum_{i=0}^{n} i^4 = h(n+1) - h(0) = \frac{1}{5}(n+1)^5 - \frac{1}{2}(n+1)^4 + \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{30}(n+1) = \frac{(n+1)[6(n+1)^4 - 15(n+1)^3 + 10(n+1)^2 - 1]}{30}$ $= \frac{(n+1)(6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 15n^3 - 45n^2 - 45n - 15 + 10n^2 + 20n + 10 - 1)}{30}$ $= \frac{(n+1)(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n)}{30} = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$. On peut en fait factoriser davantage si on remarque que le dernier facteur de degré 3 a pour racine (pas totalement évidente) $-\frac{1}{2}$, puisque $-\frac{6}{8} + \frac{9}{4} - \frac{1}{2} - 1 = 0$. On constate alors (je ne détaille pas le calcul) que $6n^3 + 9n^2 + n - 1 = (2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$. Le facteur de degré 2 a un discriminant 21 dont ne peut pas se factoriser de façon sympathique, on en reste alors à $\sum_{i=0}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n+1)}{30}$ (formule qui n'était pas demandée dans l'énoncé).
7. Nous allons donc repartir de la formule attendue à la question précédente et démontrer par récurrence la propriété P_n : $\sum_{i=0}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$. Au rang 0, la formule est trivialement vraie puisque les deux membres s'annulent. Supposons-la donc vérifiée et calculons très brutalement $\sum_{i=0}^{n+1} i^4 = \sum_{i=0}^{n} i^4 + (n+1)^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1) + 30(n+1)^4}{30} =$ $\frac{(n+1)(6n^4 + 9n^3 + n^2 - n) + 30(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1)}{30}$ $= \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n + 30n^4 + 120n^3 + 180n^2 + 120n + 30}{30}$ $= \frac{6n^5 + 45n^4 + 130n^3 + 180n^2 + 119n + 30}{30}$. Pour vérifier que cette formule correspond bien à ce que prétend P_{n+1}, nous allons développer le numérateur de ce que nous devrions obtenir : $(n+1)(n+1+1)(6(n+1)^3 + 9(n+1)^2 + n + 1 - 1) = (n+1)(n+2)(6(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 9(n^2 + 2n + 1) + n) = (n^2 + 3n + 2)(6n^3 + 27n^2 + 37n + 15) = 6n^5 + 27n^4 + 37n^3 + 15n^2 + 18n^4 + 81n^3 + 111n^2 + 45n + 12n^3 + 54n^2 + 74n + 30 = 6n^5 + 45n^4 + 130n^3 + 180n^2 + 119n + 30$. Eh ben ça marche, c'est bien le même numérateur que précédemment, ce qui prouve que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. La récurrence est donc achevée.

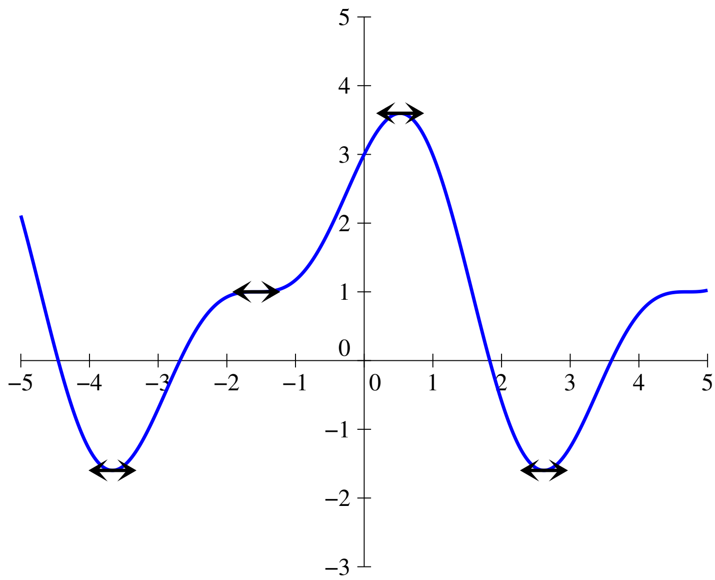
Exercice 3

1. La fonction f est 2π-périodique car cos l'est, et que $x \mapsto \sin(2x)$ est quand à elle π-périodique. Par contre, f n'est ni paire ni impaire : par exemple, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, qui n'est ni égal ni opposé à $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. On étudiera donc f sur une période complète, par exemple sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
2. On a déjà fait le premier calcul à la question précédente. Ensuite, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 - 1 + \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, et enfin $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2} = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
3. Il s'agit donc de résoudre l'équation $\sin(2x) + 2\cos(x) = 0$, soit $2\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x) = 0$ en exploitant la formule de duplication du sinus. On doit donc avoir $\cos(x) = 0$ ou $\sin(x) = -1$, mais cette deuxième condition implique la première, les seules solutions sont donc les réels de la forme $x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

4. La fonction est dérivable sur $[-\pi, \pi]$, de dérivée $f' : x \mapsto 2\cos(2x) - 2\sin(x) = 2(1 - 2\sin^2(x) - \sin(x))$. Posons donc $X = \sin(x)$ et étudions le signe du trinôme $-2X^2 - X + 1$, qui admet pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, et pour racines $X_1 = \dfrac{1-3}{-4} = \dfrac{1}{2}$ et $X_2 = \dfrac{1+3}{-4} = -1$. La dérivée s'annule donc (dans notre intervalle d'étude) pour $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{6}$ et $x = \dfrac{5\pi}{6}$. Elle est par ailleurs positive quand $\sin(x) \in \left[-1, \dfrac{1}{2}\right]$, donc (toujours sur notre intervalle d'étude) lorsque $x \in \left[-\pi, \dfrac{\pi}{6}\right]$ et lorsque $x \in \left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$ (en particulier, la dérivée s'annule en $-\dfrac{\pi}{2}$ mais sans y changer de signe !). Pour compléter le tableau de variations, calculons $f(-\pi) = f(\pi) = 1 - 2 = -1$ et $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = 1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. On a déjà calculé à la question 2 la valeur de $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$, et on sait depuis la question 3 que $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-1	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$1-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	-1

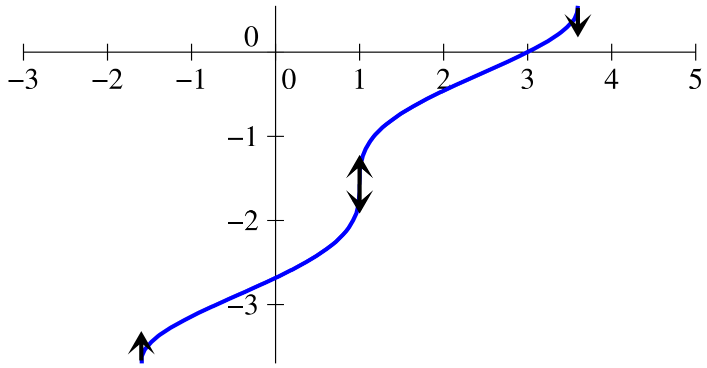
5. Rappelons simplement que $\sqrt{3} \simeq 1.7$, donc $\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \simeq 2.5$. On peut bien sûr essayer de placer correctement les nombreuses valeurs calculées au cours de l'exercice :



6. Il faut donc trouver un intervalle sur lequel la fonction f est monotone. Le plus large disponible est (par exemple) $\left[-\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]$ sur lequel f est croissante (cet intervalle représente deux tiers d'une période, f est décroissante sur le tiers restant). L'intervalle image est simplement $\left[1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, 1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right]$ vu les valeurs calculées plus haut.

7. La réciproque sera bijective et croissante de $\left[1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, 1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right]$ vers $\left[-\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]$, avec des

tangentes verticales partout où la courbe de f admettait des tangentes horizontales, c'est-à-dire en $1-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, en $1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ (les deux extrémités de l'intervalle de définition) et en -1 (valeur qui a pour image $\dfrac{-\pi}{2}$ par la réciproque).



Exercice 4

1. Commençons par rappeler que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $\cos(\arctan(x)$ est toujours positif. De plus, on sait que $1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$, donc $\cos^2(\arctan(x)) = \dfrac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \dfrac{1}{1+x^2}$. La remarque initiale sur la positivité de $\cos(\arctan(x))$ permet alors de conclure que $\cos(\arctan(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   Ensuite c'est simple : $\sin(\arctan(x)) = \tan(\arctan(x)) \times \cos(\arctan(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
2. Plein de méthodes possibles, la plus simple consistant à poser $f(x) = \arctan(x)+\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ (et aussi sur $]-\infty,0[$, mais ça ne nous intéressera pas pour cette question), et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}+\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\times\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{x^2+1} = 0$. La fonction f est donc constante sur tout l'intervalle $]0,+\infty[$. De plus, $f(1) = 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2}$, donc cette constante est égale à $\dfrac{\pi}{2}$. On a bien prouvé que, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
3. Le calcul de dérivée ne pose aucun problème : $f'(x) = \arctan(x) + \dfrac{x}{1+x^2}$. En notant G une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$, on aura donc $x\arctan(x) - G(x)$ qui est l'expression d'une primitive de arctan (puisque les termes en $\dfrac{x}{1+x^2}$ se simplifieront en dérivant pour ne laisser que l'arctangente). Or, on connait une telle fonction $G : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$ convient. Une primitive d'arctangente est donc la fonction $x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
   On en déduit que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \arctan(t)\ dt = \left[x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\pi^2}{16}\right) = \frac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{\pi^2+16}) + 2\ln(2)$. On n'obtiendra rien de mieux.

4. (a) La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, le seul problème peut venir de l'annulation du dénominateur $1 - ax$. On en déduit directement que $\mathcal{D}_{f_a} = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{a}\right\}$. La fonction f_a est dérivable sur chacun de ses deux intervalles de définition. En posant $g(x) = \frac{a+x}{1-ax}$, on a $g'(x) = \frac{1-ax+a^2+ax}{(1-ax)^2} = \frac{1+a^2}{(1-ax)^2}$, puis $f_a'(x) = \frac{1+a^2}{(1-ax)^2} \times \frac{1}{1+\frac{(a+x)^2}{(1-ax)^2}} = \frac{1+a^2}{(1-ax)^2+(a+x)^2} = \frac{1+a^2}{1-2ax+a^2x^2+a^2+2ax+x^2} = \frac{1+a^2}{1+a^2+x^2+a^2x^2}$ $= \frac{1+a^2}{(1+a^2)(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$, comme demandé.

   (b) D'après la question précédente, la fonction f_a a la même dérivée sur chacun de ses intervalles de définition que la fonction arctangente. Ainsi, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[$, $f_a(x) = \arctan(x) + K$. Comme 0 appartient à cet intervalle (puisque a est supposé strictement positif), on doit en particulier avoir $f_a(0) = K$, soit $K = \arctan(a)$. On en déduit que $f_a(x) = \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) = \arctan(a) + \arctan(x)$. Si $b > 0$ et $ab < 1$, celà signifie que $b \in \left]0, \frac{1}{a}\right[$, on peut donc lui appliquer l'égalité précédente et trouver exactement la relation $\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

   (c) Deux rédactions possibles pour cette question :

   - cette fois-ci, en supposant $ab > 1$, on a $b \in \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$. Or, de façon similaire à la question précédente, sur tout cet intervalle $\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$, on a $f_a(b) = \arctan(b) + L$, pour une certaine constante $L \in \mathbb{R}$. Le plus simple pour obtenir la valeur de L est de regarder la limite quand b tend vers $+\infty$: on a alors $\lim_{b\to+\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}$, et $\lim_{b\to+\infty} \frac{a+b}{1-ab} = -\frac{1}{a}$ (quotient des termes de plus haut degré), donc $\lim_{b\to+\infty} f_a(b) = \arctan\left(-\frac{1}{a}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \arctan(a) - \frac{\pi}{2}$ en utilisant l'imparité d'arctangente puis la relation démontrée à la question 2. Finalement, on obtient la condition $\arctan(a) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + L$, soit $L = \arctan(a) - \pi$. Finalement, la relation (B) s'écrit $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi = \arctan(a) + \arctan(b)$.
   - autre possibilité, on constate que $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ sont strictement positifs et vérifient $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} < 1$ (puisque l'inverse ab de ce produit est strictement supérieur à 1), donc on peut leur appliquer la relation (A), en constatant que $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{1-\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}} = \frac{a+b}{ab-1} = -\frac{a+b}{1-ab}$. En exploitant les mêmes ingrédients que ci-dessus (imparité de l'arctangente et relation de la question 2), on calcule alors $\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) = -\arctan\left(\frac{1}{a}\right) - \arctan\left(\frac{1}{b}\right) = \arctan(a) - \frac{\pi}{2} + \arctan(b) - \frac{\pi}{2} = \arctan(a) + \arctan(b) - \pi$. On retrouve bien sûr la même relation que par l'autre méthode.

5. Celà semble simple, on passe tout dans la tangente et on trouve à l'aide de la formule d'addition des tangentes que $\tan(\arctan(a)+\arctan(b)) = \frac{\tan(\arctan(a)) + \tan(\arctan(b))}{1 - \tan(\arctan(a))\tan(\arctan(b))} = \frac{a+b}{1-ab} =$

$\tan\left(\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)\right)$, mais prouver l'égalité des tangentes ne fait que prouver l'égalité des angles à un multiple de π près ! Or, on sait que $a > 0$, $b > 0$ et $\frac{ab}{1-ab} > 0$ puisque $ab < 1$. Chacune des trois arctangentes appartient donc à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui prouve que le membre de gauche de la relation (A) appartient à $]0, \pi[$, et le membre de droite aussi (il est même dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$). Ils ne peuvent donc pas être séparés d'un multiple entier de π, ils sont nécessairement égaux.

6. En exploitant (A) avec $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{1}{13}$ (leur produit est largement inférieur à 1), on obtient déjà $\arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{13}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{13}}{1-\frac{1}{52}}\right) = \arctan\left(\frac{17}{51}\right) = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$. On recommence en posant $a = b = \frac{1}{3}$. Cette fois, $\frac{a+b}{1-ab} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, donc $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$. Enfin, dernière application de la relation avec $a = \frac{3}{4}$ et $b = \frac{1}{7}$, on calcule cette fois $\frac{a+b}{1-ab} = \frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{28}} = \frac{25}{25} = 1$. Eh oui, miracle, la somme demandée est bêtement égale à $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.
7. Cette fois-ci les produits sont toujours strictement supérieurs à 1. Calculons par exemple $\arctan(5) + \arctan(8) = \arctan\left(\frac{5+8}{1-40}\right) + \pi = \pi - \arctan\left(\frac{13}{39}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$. Par ailleurs, $\arctan(2) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$, donc le nombre recherché (appelons-le Z) est égal à $Z = \frac{3\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$. Une dernière application de la relation (A) avec $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{2}$ donne $\frac{a+b}{1-ab} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{5}{5} = 1$, donc $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, et $Z = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.