Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 2

PTSI B Lycée Eiffel

12 octobre 2019

Exercice 1

Les divers calculs de ce premier exercice sont indépendants.

1. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^2$ (on donnera le résultat sous la forme la plus factorisée possible).
2. Résoudre l'équation $\text{ch}(x) = 2$.
3. Calculer la somme triple (même principe de calcul qu'une somme double) $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant n} 1$.
4. Résoudre l'équation $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$.
5. Calculer la valeur de $\sin\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$.

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à déterminer un moyen d'obtenir des formules pour des sommes du type $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^p$ (où p est un entier naturel non nul fixé), sans passer par une récurrence. Il est bien sûr interdit dans cet exercice d'utiliser les formules vues en cours pour $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2$ ou $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3$, puisque le but sera notamment de retrouver une partie de ces formules.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque, simplifier la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} f(i+1) - f(i)$ (il devrait rester deux termes).
2. En posant $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{6}x$, développer et simplifier l'expression de $f(x+1) - f(x)$.
3. En déduire un calcul de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2$ impliquant la fonction définie à la question précédente (on devrait simplement obtenir $f(n+1)$). Factoriser l'expression obtenue pour retrouver l'expression vue en cours de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2$.
4. Déterminer une fonction g dont l'expression est de la forme $g(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x+1) - g(x) = x^3$.
5. En vous inspirant des premières questions de l'exercice, en déduire une méthode pour calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^3$, et vérifier qu'on obtient la même formule que celle vue en cours.
6. On **admet** que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{5}x^5 - \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{30}x$ vérifie que $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x+1) - h(x) = x^4$. En déduire (toujours en suivant la même démarche) une formule pour la somme $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^4$ (on

ne cherchera à factoriser que ce qui est « évident », il restera au numérateur un polynôme de degré 3 auquel on ne touchera pas).

7. Redémontrer la formule obtenue à la question précédente par récurrence (attention, question très calculatoire).

Exercice 3

On définit pour cet exercice une fonction f par $f(x) = 1 + \sin(2x) + 2\cos(x)$.

1. Déterminer un intervalle d'étude le plus retreint possible pour la fonction f.
2. Calculer les images par la fonction f des réels suivants : $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$.
3. Déterminer les antécédents par f du réel 1.
4. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle choisi à la première question.
5. Tracer la courbe représentative de la fonction f (on représentera au moins une période complète).
6. Déterminer un intervalle I le plus large possible sur lequel f effectue une bijection, et préciser vers quel intervalle s'effectue cette bijection.
7. Donner une allure rapide de la courbe représentative de la réciproque de la bijection évoquée à la question précédente (on y indiquera en particulier les éventuelles tangentes verticales).

Exercice 4

Nous allons présenter dans ce dernier exercice quelques résultats complémentaires sur la fonction arctangente. La plupart des questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Simplifier l'expression de $\cos(\arctan(x))$ et de $\sin(\arctan(x))$ pour tout réel x.
2. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
3. Dériver la fonction $f : x \mapsto x\arctan(x)$. En déduire une primitive de la fonction arctan, puis la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \arctan(t)\, dt$ (on ne cherchera surtout pas à simplifier l'expression obtenue).
4. Soit a un réel strictement positif, on pose $f_a(x) = \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)$.
   (a) Préciser le domaine de définition de f_a, et prouver que, partout où elle est définie, sa dérivée vérifie $f_a'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   (b) Déduire de la question précédente que, si deux réels positifs a et b sont tels que $ab < 1$, alors $\arctan(a)+\arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$. Cette dernière relation sera notée (A) pour la suite de l'exercice.
   (c) Quelle relation peut-on obtenir dans le cas où $ab > 1$? Cette deuxième relation sera notée (B) pour la suite de l'exercice.
5. Redémontrer la relation (A) évoquée à la question précédente par un calcul direct, en la composant par la fonction tangente (on fera attention à être bien rigoureux).
6. Calculer en exploitant la relation (A) (même si vous n'avez pas réussi à la démontrer) la valeur de l'expression $2\arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{13}\right)$.
7. Calculer $\arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$ (on pourra exploiter la relation (B) évoquée plus haut).