Devoir Surveillé n° 1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

21 septembre 2019

Exercice 1

1. Pas besoin de faire de tableau ici, le cas d'une égalité de valeurs absolues se traite directement : on a soit $x^2+x-1=2x+5$, soit $x^2+x-1=-2x-5$. La première équation est équivalente à $x^2-x-6=0$, qui a pour discriminant $\Delta=1+24=25$, et admet donc deux racines réelles $x_1=\dfrac{1-5}{2}=-2$ et $x_2=\dfrac{1+5}{2}=3$. La deuxième équation est équivalente à x^2+3x+4, qui a un discriminant strictement négatif, et donc pas de racine réelle. Finalement, $\mathcal{S}=\{-2,3\}$.
2. On peut bien sûr commencer par factoriser par x pour obtenir l'équation équivalente $x(2x^3-3x^2-5x+6)=0$. Le deuxième facteur admet pour racine évidente $x=1$ (puisque $2-3-5+6=0$), donc peut se factoriser sous la forme $2x^3-3x^2-5x+6=(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$. Par identification des coefficients, on doit avoir $a=2$, puis $b-a=-3$, donc $b=-1$, et $c-b=-5$ qui donne $c=-6$, cohérent avec la dernière condition. Il ne reste plus qu'à chercher les solutions de l'équation $2x^2-x-6=0$, qui a pour discriminant $\Delta=1+48=49$, et pour solutions $x_1=\dfrac{1-7}{4}=-\dfrac{3}{2}$ et $x_2=\dfrac{1+7}{4}=2$. Finalement, $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{3}{2},0,1,2\right\}$.
3. Cette fois-ci, on n'échappera pas à un petit tableau : la valeur absolue de gauche s'annule pour $x=-1$ et celle de droite lorsque $x=\dfrac{5}{2}$.

x		-1		$\frac{5}{2}$	
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	0	$x+1$		$x+1$
$\lvert 2x-5\rvert$	$5-2x$		$5-2x$	0	$2x-5$
$\lvert x+1\rvert-\lvert 2x-5\rvert$	$x-6$		$3x-4$		$-x+6$

Il ne reste plus qu'à résoudre sur chacun des trois intervalles :
- sur $]-\infty,-1]$, l'inéquation initiale est équivalente à $x-6\leqslant 0$, soit $x\leqslant 6$, on peut garder tout l'intervalle $]-\infty,6]$.
- sur $\left[-1,\dfrac{5}{2}\right]$, l'inéquation est équivalente à $3x-4\leqslant 0$, soit $x\leqslant\dfrac{4}{3}$, qui appartient à l'intervalle de résolution, on garde donc l'intervalle $\left[-1,\dfrac{4}{3}\right]$.
- enfin, sur $\left[\dfrac{5}{2},+\infty\right[$, l'inéquation équivalente $-x+6\leqslant 0$ donne la condition $x\geqslant 6$ qui conduit à conserver l'intervalle $[6,+\infty[$.

Conclusion : $\mathcal{S}=\left]-\infty,\dfrac{4}{3}\right]\cup[6,+\infty[$.

4. On fait tout passer à gauche avant de mettre au même dénominateur pour obtenir l'inégalité équivalente $\dfrac{(3-2x)(2-x)-(2-3x)(3-x)}{(3-x)(2-x)}\leqslant 0$, soit $\dfrac{6-4x-3x+2x^2-6+9x+2x-3x^2}{(3-x)(2-x)}\leqslant$

0, ou encore $\dfrac{-x^2+4x}{(3-x)(2-x)} \leqslant 0$. Le numérateur se factorise immédiatement en $x(4-x)$, on peut donc dresser rapidement un tableau de signes du quotient Q :

x		0		2		3		4	
$x(4-x)$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$
$(3-x)(2-x)$	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$
Q	$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$-$

On peut conclure : $\mathcal{S} =]-\infty, 0] \cup]2, 3[\cup [4, +\infty[$.

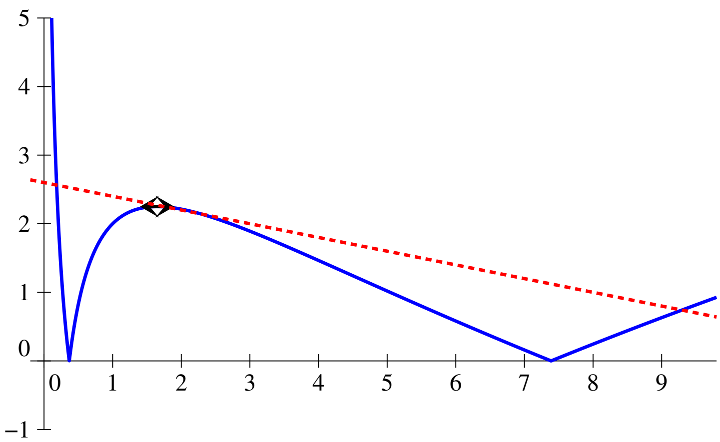
5. Commençons par constater que $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{2^2}$, donc $A = \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$. Calculons donc à partir de cette expression $A^2 = 6-2\sqrt{5}-2\sqrt{(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}+6+2\sqrt{5} = 12-2\sqrt{36-20} = 12-2\times 4 = 4$. On en déduit que $A = \pm 2$, et comme $A < 0$ (puisque $\sqrt{6+2\sqrt{5}} > \sqrt{6-2\sqrt{5}}$), on a donc $A = -2$.

Exercice 2

1. En posant $X = \ln(x)$, on se ramène à l'équation du second degré $X^2 - X - 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ et admet donc pour racines $X_1 = \dfrac{1-3}{2} = -1$ et $X_2 = \dfrac{1+3}{2} = 2$. Les solutions de l'équation initiale sont donc les deux réels $x_1 = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$ et $x_2 = e^2$. L'expression $\ln^2(x) - \ln(x) - 2$ étant positive à l'extérieur de ces deux solutions, on en déduit que :
   - $f(x) = \ln^2(x) - \ln(x) - 2$ si $x \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right] \cup [e^2, +\infty[$.
   - $f(x) = 2 + \ln(x) - \ln^2(x)$ si $x \in \left[\dfrac{1}{e}, e^2\right]$.
2. Il s'agit de résoudre l'équation $f(x) = 4$, qui se ramène aux deux équations possibles $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 = 4$ et $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 = -4$. En effectuant à nouveau le changement de variable $X = \ln(x)$, la première équation se ramène à $X^2 - X - 6 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 24 = 25$, et qui admet comme racines $X_1 = \dfrac{1-5}{2} = -2$ et $X_2 = \dfrac{1+5}{2} = 3$. De même la deuxième équation se ramène à $X^2 - X + 2 = 0$, qui a un discriminant négatif et donc pas de solution réelle. Il y a donc deux antécédents pour 4, qui sont $e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$, et e^3.
3. Posons pour simplifier l'étude $g(x) = \ln^2(x) - \ln(x) - 2$, fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2\ln(x)-1}{x}$. Cette dérivée est du signe de $2\ln(x) - 1$, et s'annule en particulier lorsque $\ln(x) = \dfrac{1}{2}$, donc $x = \sqrt{e}$. On connait déjà le signe de la fonction g (question 1), on peut donc dresser simultanément le tableau de signe et de variations de la fonction g, et en déduire le tableau de variations de f. Calculons tout de même $g(\sqrt{e}) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - 2 = -\dfrac{9}{4}$, et signalons que $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée ici), et comme $g(x) = \ln(x)\left(\ln(x) - 1 - \dfrac{2}{\ln(x)}\right)$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (ce qui est dans la parenthèse tendant vers $+\infty$).

x	0		$\frac{1}{e}$		$\sqrt{e}$		e^2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{9}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{9}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. La valeur $x = 2$ se trouve sur l'intervalle sur lequel $g(x)$ est négatif, il faut donc bien faire attention aux signes : $f(2) = -g(2) = 2+\ln(2)-\ln^2(2)$, et $f'(2) = -g'(2) = \dfrac{1-2\ln(2)}{2}$, donc la tangente a pour équation $y = \left(\dfrac{1}{2} - 2\dfrac{\ln(2)}{2}\right)(x-2) + 2 + \ln(2) - \ln^2(2) = \dfrac{1-2\ln(2)}{2}x + 1 + 3\ln(2) - \ln^2(2)$. Son coefficient directeur est $\dfrac{1-2\ln(2)}{2} \simeq \dfrac{-0.4}{2} \simeq -0.2$, et son ordonnée à l'origine $1 + 3\ln(2) - \ln^2(2) \simeq 1 + 2.1 - 0.5 \simeq 2.6$.
5. On fait bien attention à ce que la fonction f n'est pas dérivable en ses points d'annulation (surtout pas de tangentes horizontales à ces endroits-là), on utilise les valeurs approchées de la question précédente pour tracer la tangente, et si on le peut on essaye d'indiquer les antécédents de 4 calculés plus haut, mais l'échelle n'est pas très adaptée pour celà (ils ne figurent pas sur la courbe ci-dessous) :

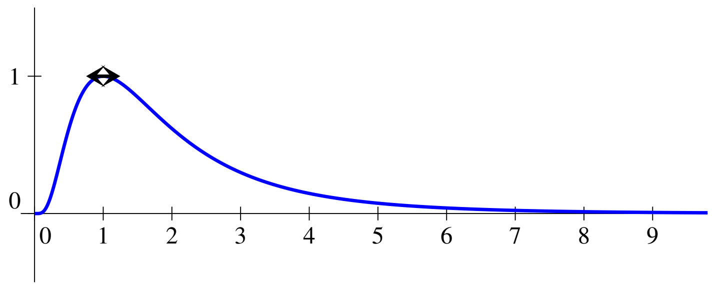


Exercice 3

1. Le premier réflexe face à ce genre d'expression doit être de mettre immédiatement sous forme exponentielle : $f(x) = e^{-\ln(x)\times\ln(x)} = e^{-\ln^2(x)}$. Sous cette forme, il est évident que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^{+*}$.
2. La fonction f est dérivable sur son intervalle de définition, de dérivée $f'(x) = -\dfrac{2\ln(x)}{x}e^{-\ln^2(x)}$. En particulier, $f'(x)$ est tout simplement du signe de $-\ln(x)$, et s'annule en particulier quand $x = 1$. On a bien sûr $f(1) = e^0 = 1$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} -\ln^2(x) = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. C'est exactement le même calcul (et donc la même limite) en $+\infty$.
3. On a déjà tout fait :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$\|\|$ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4. Toujours en partant de la forme exponentielle, on doit résoudre $e^{-\ln^2(x)} = \dfrac{1}{e}$, soit $-\ln^2(x) = -1$. Autrement dit, on doit avoir $\ln(x) = \pm 1$, donc $x = e^1 = e$, ou $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.
5. Pas grand chose de passionnant à indiquer sur cette courbe, à vrai dire (on peut signaler les antécédents de $\dfrac{1}{e}$ si on est motivé) :



Exercice 4

1. C'est assez surprenant vu l'intitulé de la question, mais les fonctions f_n n'ont jamais de parité notable. On peut le prouver rigoureusement en calculant $f_n(1) = 1^n e^0 = 1$ et $f_n(-1) = (-1)^n e^2 = \pm e^2$. Ces deux valeurs n'étant jamais égales ou opposées, la fonction f_n ne peut pas être paire ni impaire.
2. Commençons donc par $f_0 : x \mapsto e^{1-x}$. Pas besoin du moindre calcul pour affirmer que f_0 est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, et les limites sont évidentes, d'où le tbleau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f_0	$+\infty$	$\searrow$	e	$\searrow$	0

Passons maintenant à $f_1 : x \mapsto xe^{1-x}$. Cette fois-ci, nous allons dériver (toutes les fonctions f_n sont dérivables sur $\mathbb{R}$) : $f_1'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = (1-x)e^{1-x}$. Cette dérivée s'annule en $x = 1$, valeur pour laquelle $f_1(1) = 1$ (valeur déjà calculée à la question 1). On a cette fois $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée de ce côté). De plus, $f_1(x) = -e \times (-xe^{-x})$. Comme l'énoncé affirme que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$, on en déduit facilement que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$. D'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

On termine avec l'étude de $f_2 : x \mapsto x^2e^{1-x}$. Là encore, on va passer par la dérivée $f_2'(x) = 2xe^{1-x} - x^2e^{1-x} = x(2-x)e^{1-x}$. L'étude de signe est évidente, calculons simplement $f_2(0) = 0$ et $f_2(2) = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$. Toujours aucun problème pour calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x) = +\infty$. De l'autre côté, on va tenter une autre approche que pour f_1, en posant $X = 1 - x$, soit $x = 1 - X$ (la variable X tendra bien sûr vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$) pour obtenir $f_(x) = (1-X)^2e^X = X^2e^X - 2Xe^X + e^X$, ce dont on déduit (en exploitant à nouveau les résultats donnés par l'énoncé) que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = 0$. Un dernier tableau pour la route :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f_2'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

3. Ce n'est pas vraiment plus compliqué : $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^ne^{1-x} = (n-x)x^{n-1}e^{1-x}$. Dans le cas où n est un entier impair, x^{n-1} est toujours positif, et la dérivée est donc très simplement du signe de $n - x$. La fonction f_n admet alors un maximum de valeur $f_n(n) = n^ne^{1-n} = e\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Le tableau de variations ressemble donc à ceci :

x	$-\infty$		n		$+\infty$
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	n^ne^{1-n}	$\searrow$	0

Dans le cas où n est pair, x^{n-1} change également de signe en 0, ce qui complique à peine le tableau :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f_n	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	n^ne^{1-n}	$\searrow$	0

On ne justifiera pas les limites indiquées dans les deux derniers tableaux de variations, puisque ce n'était pas demandé dans l'énoncé.

4. Dérivons donc une deuxième fois : $f_2''(x) = (2-2x)e^{1-x} - (2x - x^2)e^{1-x} = (2 - 4x + x^2)e^{1-x}$. Cette dérivée est donc du signe de $x^2 - 4x + 2$, trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = 16 - 8 = 8$, et qui admet pour racines $x_1 = \frac{4-\sqrt{8}}{2} = 2 - \sqrt{2}$, et $x_2 = \frac{4+\sqrt{8}}{2} = 2 + \sqrt{2}$. La fonction f_2'' est bien sûr positive sur $]-\infty, 2-\sqrt{2}]$ et sur $[2+\sqrt{2}, +\infty[$, et négative sur $[2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}]$. Pour déterminer les équations de tangente, il faut maintenant calculer $f_2(2+\sqrt{2}) = (2+\sqrt{2})^2e^{1-2-\sqrt{2}} = (6+4\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}$ et $f_2'(2+\sqrt{2}) = (4+2\sqrt{2}-6-4\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}} = (-2-2\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}$. La tangente au point d'abscisse $2+\sqrt{2}$ a donc pour équation $y = (-2-2\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}(x-2-\sqrt{2}) + (6+4\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}} = e^{-1-\sqrt{2}}((-2-2\sqrt{2})x + 14 + 10\sqrt{2})$. Passionnant. De même pour l'autre valeur, on a $f_2(2-\sqrt{2}) = (2-\sqrt{2})^2e^{1-2+\sqrt{2}} = (6-4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}$ et $f_2'(2-\sqrt{2}) = (4-2\sqrt{2}-6+4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1} = (-2+2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}$, donc la deuxième tangente demandée a pour équation $y = (-2+2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}(x-2+\sqrt{2}) + (6-4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1} = e^{\sqrt{2}-1}((2\sqrt{2}-2)x + 14 - 10\sqrt{2})$.

5. Pour cette étude, on cherche le signe de $f_1(x) - f_0(x) = (x-1)e^{1-x}$. On obtient immédiatement les résultats suivants : $\mathcal{C}_1$ est en-dessous de $\mathcal{C}_0$ sur $]-\infty, 1]$, et au-dessus sur $[1, +\infty[$. De même on calcule $f_2(x) - f_1(x) = (x^2 - x)e^{1-x} = x(x-1)e^{1-x}$. Cette fois-ci, $\mathcal{C}_2$ est en-dessous de $\mathcal{C}_\infty$ sur $[0, 1]$, et au-dessus sur les deux intervalles $]-\infty, 0]$ et $[1, +\infty[$. Enfin, il ne faut pas oublier d'étudier aussi $f_2(x) - f_0(x) = (x^2 - 1)e^{1-x} = (x+1)(x-1)e^{1-x}$. On aura donc $\mathcal{C}_2$ en-dessous de $\mathcal{C}_0$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, et au-dessus le reste du temps, c'est-à-dire sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$.
6. On respecte bien entendu les positions relatives des courbes obtenues à la question précédente. On connait déjà les coordonnées complètes des points d'intersection puisqu'on a calculé en cours d'exercice $f_n(0) = 0$ (sauf le cas particulier $f_0(0) = 1$, $f_n(1) = 1$ et $f_n(-1) = \pm e^2$ selon la parité de l'entier n. On peut aussi essayer si on est courageux d'indiquer les tangentes obtenues à la question 4, mais très sincèrement ça n'a pas grand intérêt et ça ne sera de toute façon pas très lisible (elles sont indiquées en pointillés noirs sur mon graphique). Ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}_0$ est en bleu, $\mathcal{C}_1$ est en rouge, et $\mathcal{C}_2$ est en vert :