Devoir Surveillé n$^{\text{o}}$ 1

PTSI B Lycée Eiffel

21 septembre 2019

Exercice 1

Effectuer les divers calculs suivants (questions indépendantes) :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $|x^2 + x - 1| = |2x + 5|$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|x + 1| \leqslant |2x - 5|$.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{3 - 2x}{3 - x} \leqslant \dfrac{2 - 3x}{2 - x}$.
5. Montrer que $A = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} - 2\sqrt{\dfrac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1}}$ est un nombre entier, et préciser sa valeur.

Exercice 2

On considère dans cet exercice la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = |\ln^2(x) - \ln(x) - 2|$.

1. Résoudre l'équation $\ln^2(x) - x - 2 = 0$. En déduire une expression de $f(x)$ n'utilisant pas la valeur absolue (on distinguera plusieurs intervalles si besoin).
2. Déterminer tous les antécédents de 4 par la fonction f.
3. Étudier les variations de la fonction f, et dresser son tableau de variations complet.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 2. On donnera une valeur approchée du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine de cette tangente.
5. Tracer une allure précise de la courbe représentative de f en tenant compte de tous les calculs effectués précédemment. On donne la valeur approchée $\sqrt{e} \simeq 1.65$ pour aider au tracé de la courbe.

Exercice 3

On pose dans cet exercice $f(x) = x^{-\ln(x)}$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. En écrivant $f(x)$ sous forme exponentielle, calculer sa dérivée f', et étudier les variations de la fonction f.
3. En déduire le tableau de variations complet de la fonction f.
4. Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{1}{e}$.
5. Tracer une allure rapide de la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 4

On pose, pour tout entier naturel n, $f_n(x) = x^n e^{1-x}$. On notera $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n. On pourra utiliser tout au long de l'exercice le résultat suivant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$.

1. Préciser la parité des fonctions f_n.
2. Étudier complètement les fonctions f_0, f_1 et f_2 (variations et limites).
3. Déterminer plus généralement les variations de la fonction f_n.
4. Étudier le signe de la dérivée seconde f_2'' de la fonction f_2. Déterminer les équations des tangentes aux points de la courbe $\mathcal{C}_2$ dont les abscisses sont solution de l'équation $f_2''(x) = 0$.
5. Étudier la position relative des courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
6. Tracer une allure des courbes $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ dans un même repère.