Concours Blanc de mathématiques : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 juin 2020

Exercice 1

On reconnait bien sûr une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On écrit donc l'équation caractéristique associée : $r^2 + 5r + 4 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 25 - 16 = 9$, et qui admet donc deux racines réelles $r_1 = \dfrac{-5+3}{2} = -1$ et $r_2 = \dfrac{-5-3}{2} = -4$. Les solutions de l'équation homogène associée à notre équation différentielle sont toutes les fonctions de la forme $t \mapsto Ae^{-t} + Be^{-4t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

On va maintenant chercher une solution particulière de l'équation complète. Comme notre second membre est produit d'un polynôme de degré 1 par une exponentielle dont le coefficient est racine (mais pas racine double) de l'équation caractéristique, on cherchera y_p sous la forme $y_p(t) = (at^2+bt+c)e^{-t}$. On calcule donc $y_p'(t) = (2at+b-at^2-bt-c)e^{-t} = (-at^2+(2a-b)t+b-c)e^{-t}$, puis $y''(t) = (-2at + 2a - b + at^2 + (b - 2a)t + c - b)e^{-t} = (at^2 + (b - 4a)t + 2a - 2b + c)e^{-t}$. Notre fonction est donc solution de l'équation si et seulement si (en simplifiant par e^{-t} qui ne s'annule jamais) $at^2 + (b-4a)t + 2a - 2b + c - 5at^2 + (10a - 5b)t + 5b - 5c + 4at^2 + 4bt + 4c = t$. Comme prévu, le terme en t^2 dans le membre de gauche s'annule, et une identification de ce qui reste donne les deux équations $b - 4a + 10a - 5b + 4b = 1$ et $2a - 2b + c + 5b - 5c + 4c = 0$, soit $6a = 1$ et $2a + 3b = 0$. On peut donc prendre $a = \dfrac{1}{6}$ et $b = -\dfrac{2}{3}a = -\dfrac{1}{9}$ (comme toujours quand on a augmenté le degré du polynome, la valeur de c n'intervient pas dans le calcul, on prend donc simplement $c = 0$). Finalement, la fonction $y \mapsto \left(\dfrac{1}{6}t^2 - \dfrac{1}{9}t\right) e^{-t}$ est solution particulière de l'équation.

Il ne reste plus qu'à conclure : les solutions de notre équation différentielle sont toutes les fonctions de la forme $y : t \mapsto \left(\dfrac{1}{6}t^2 - \dfrac{1}{9}t + A\right) e^{-t} + Be^{-4t}$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2

A. Étude d'une fonction f.

1. La fonction f est définie si $x \neq 0$ et $1 + 2x > 0$, donc $\mathcal{D}_f = \left]-\dfrac{1}{2}, 0\right[\cup]0, +\infty[$.
2. On commence par écrire un développement limité à l'ordre 3 du numérateur car on va perdre un degré en divisant par x. Comme on sait que $\ln(1 + x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, on en déduit en composant par $x \mapsto 2x$ (bien entendu, $2x$ tend bers 0 quand x tend vers 0 que $\ln(1+2x) = 2x - 2x^2\dfrac{8}{3}x^3 + o(x^3)$, puis $f(x) = 2 - 2x + \dfrac{8}{3}x^2 - 1 + o(x^2) = 1 - 2x + \dfrac{8}{3}x^2 + o(x^2)$. On en déduit successivement :

- que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, ce qui prouve l'existence du prolongement par continuité de f en 0 (on aura donc désormais $f(0) = 1$ puisqu'on garde la même notation pour la fonction).
- que f est dérivable en 0 (puisqu'elle y admet un développement limité à l'ordre 1), et que $f'(0) = -2$. La tangente recherchée a donc pour équation $y = 1 - 2x$.
- que $f(x) - (1-2x) \sim \dfrac{8}{3}x^2 > 0$, donc la courbe sera située au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

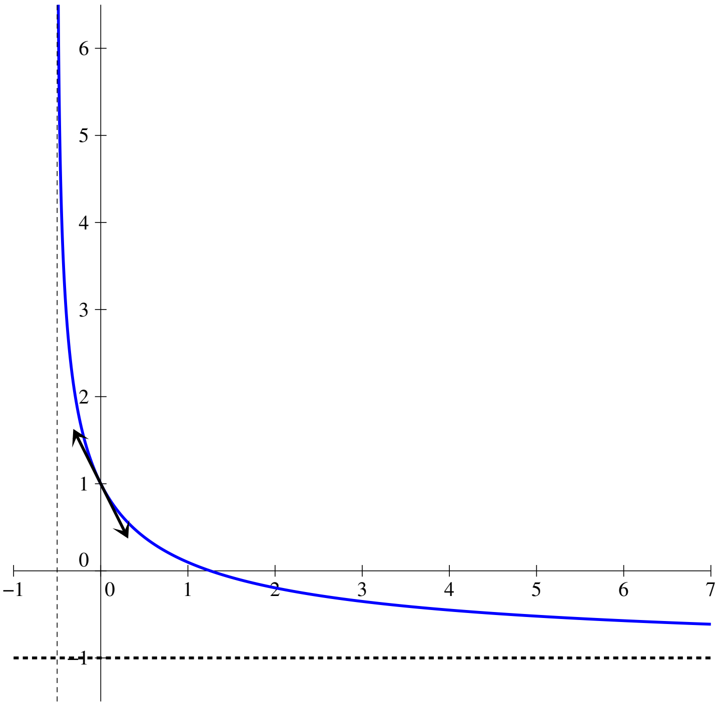
3. La fonction h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $h'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1-x}{x^2}$. Cette dérivée étant du signe de $1-x$, la fonction h est strictement croissante sur l'intervalle $]0,1[$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. Elle admet donc en 1 un maximum de valeur $h(1) = 1 - 1 - \ln(1) = 0$, ce qui prouve que h est toujours négative.

4. Ailleurs qu'en 0, on calcule la dérivée $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{1+2x} \times x - \ln(1+2x)}{x^2}$ $= \dfrac{1}{x^2} \times \left(1 - \dfrac{1}{1+2x} - \ln(1+2x)\right) = \dfrac{h(1+2x)}{x^2}$. D'après la question précédente, le numérateur de cette fraction est toujours négatif, et f est donc décroissante sur tout son domaine de définition. Restent à calculer les limites : $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée ici), et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} = 0$ par croissance comparée, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$. On conclut avec le tout bête tableau suivant :

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	-1

5. Puisque f est continue et décroissante, elle effectue une bijection de $\left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ vers $]-1,+\infty[$. En particulier l'équation $f(x) = 0$ admet bien une unique solution. De plus $f(1) = \ln(3) - 1 > 0$ (puisque $e < 3 \Rightarrow 1 < \ln(3)$), et $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{2}{3}\ln(4) - 1 = \dfrac{4}{3}\ln(2) - 1$. On sait que $\ln(2) \simeq 0,69 < 0,7$ donc $\ln(4) = 2\ln(2) < 1,4 < \dfrac{3}{2}$, ce dont on déduit que $f\left(\dfrac{3}{2}\right) < 0$. La fonction f étant strictement décroissante, $f(1) > f(\alpha) = 0 > f\left(\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow 1 < \alpha < \dfrac{3}{2}$.

6. On n'oublie bien sûr pas la tangente calculée en début d'exercice puisqu'elle constitue notre principale information !



B. Étude d'une suite récurrente.

1. Il suffit que u_n soit strictement supérieur à $-\dfrac{1}{2}$ pour que u_{n+1} existe, ce qui est bien sûr impliqué par $u_n > 0$. On a tout de même besoin de faire une récurrence : la propriété est vraie pour u_0 par hypothèse, et en supposant que $u_n > 0$, u_{n+1} existe donc et $u_{n+1} > \ln(1) = 0$ par croissance de la fonction ln, ce qui prouve l'hérédité.

2. Il s'agit d'une suite récurrente définie par une relation de la forme $u_{n+1} = g(u_n)$, où g est une fonction continue. La limite de la suite (si elle existe) est donc un point fixe de la fonction g. Or, l'équation $\ln(1+2x) = x$ est vérifiée lorsque $x = 0$, ou lorsque $\dfrac{\ln(1+2x)}{x} = 1$, donc lorsque $f(x) = 0$, où f est la fonction étudiée dans la première partie du problème. On sait que f s'annule uniquement en α, donc les seules valeurs possibles de notre limite sont 0 et α.

3. (a) On sait déjà que $g(0) = 0$ et $g(\alpha) = \alpha$. La fonction g est par ailleurs croissante comme composée de fonctions croissantes, donc $g(]0, \alpha]) =]0, \alpha]$, et l'intervalle $]0, \alpha]$ est un intervalle stable par la fonction g. On prouve alors par une récurrence triviale la propriété souhaitée : elle est vraie au rang 0 par hypothèse, et $0 < u_n \leqslant \alpha \Rightarrow 0 < u_{n+1} = g(u_n) \leqslant g(\alpha) = \alpha$.

   (b) On calcule $u_{n+1} - u_n = \ln(1+2u_n) - u_n = u_n f(u_n)$. On a vu lors de l'étude de la fonction f que $f(u_n)$ était positif si $u_n \leqslant \alpha$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ et la suite est croissante. Étant majorée par α, elle converge donc. Or, on a (par croissance de la suite) $u_n \geqslant u_0 > 0$, donc la suite ne peut pas converger vers 0. La seule limite possible est alors α.

4. C'est exactement pareil : on prouve par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \alpha$ (l'hérédité utilisant à nouveau de façon évidente la croissance de la fonction g). Ensuite, on écrit $u_{n+1} - u_n = u_n f(u_n)$, mais on a désormais $f(u_n) \leqslant 0$, donc la suite (u_n) est décroissante. Étant minorée par α, elle converge, et on a bien sûr $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

5. (a) Calculons $g(1) = \ln(3) > 1$. Comme $g(\alpha) = \alpha$ et que g est croissante, on a donc $g(I) = [\ln(3), \alpha] \subset I$. L'intervalle I est bien stable par g. On calcule $g'(x) = \dfrac{2}{1+2x}$, et on procède par encadrement successifs : si $1 \leqslant x \leqslant \alpha$, alors $3 \leqslant 1+2x \leqslant 1+2\alpha$, donc $0 < \dfrac{1}{1+2x} \leqslant \dfrac{1}{3}$, et il ne reste plus qu'à multiplier par 2 pour en déduire que $|g'(x)| \leqslant \dfrac{2}{3}$.

   (b) On commence bien sûr par appliquer l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle I (sur lequel on a vient de majorer la dérivée de g). On a bien sûr $\alpha \in I$, et $u_n \in I$ par récurrence triviale puisque l'intervalle est stable par g ($u_0 = 1 \in I$ et $u_n \in I \Rightarrow g(u_n) = u_{n+1} \in I$ par stabilité de l'intervalle). On peut donc écrire que $|g(u_n) - g(\alpha)| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$, donc $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha|$. Il reste une dernière récurrence à faire pour en déduire la majoration de l'énoncé. Pour $n = 0$, on a $|u_0 - \alpha| = \alpha - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$ d'après l'encadrement de α obtenu dans la première partie de l'exercice, donc a fortiori $|u_0 - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3}$. Supposons désormais que $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, alors $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{2}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$. La propriété est donc héréditaire, et vraie pour tout entier naturel n.

   (c) La condition $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$ est impliquée d'après la question précédente par $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \leqslant 10^{-3}$. On peut donc choisir un entier n tel que $n \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) \leqslant -3\ln(10)$, ou encore (on divise par une quantité négative) $n \geqslant \dfrac{3\ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)}$. Théoriquement, l'entier $n = Ent\left(\dfrac{3\ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)}\right) + 1$ conviendra donc. Sans chercher à être très précis, en partant de $\ln(3) \simeq 1,1$ et $\ln(2) \simeq 0,7$, on peut dire que $\ln(10) = \ln(2) + \ln(5) \leqslant 2\ln(2) + \ln(3) \leqslant 3$ (on prend un peu de marge car l'arrondi de $\ln(3)$ est un arrondi par défaut). Le dénominateur $\ln(3) - \ln(2)$ est quant à lui supérieur à $0,3$, ce qui donne un entier n supérieur à $\dfrac{9}{0,3} = 30$. En pratique, on aura certainement une valeur approchée à 10^{-3} près largement avant d'atteindre u_{30}.

6. On veut donc calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+2x)\,dx$. Plein de méthodes possibles, mais imaginons qu'on parte sur une IPP en posant $u(x) = \ln(1+2x)$, donc $u'(x) = \dfrac{2}{1+2x}$, et $v'(x) = 1$, donc $v(x) = x$ (toutes ces fonctions sont bien sûr de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$). On obtient alors $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = [x\ln(1+2x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x}{1+2x}\,dx = \ln(3) - \int_0^1 1 - \frac{1}{1+2x}\,dx = \ln(3) - \left[x - \frac{\ln(1+2x)}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\ln(3) - 1$.

Exercice 3

A. Étude dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Puisque ${}^tA = A$, on aura simplement ${}^tAA = A{}^tA = A^2$, donc A vérifie bien la relation (1). Ce sera d'ailleurs plus généralement le cas de toutes les matrices symétriques. De même, on

a ${}^tC = -C$, donc ${}^tCC = C{}^tC = -C^2$, et on peut généraliser au cas de toutes les matrices antisymétriques qui vérifieront aussi la relation (1).

2. On calcule très directement $A^2 = I$. On en déduit qu'on aura $A^n = I$ lorsque n est un entier pair et $A^n = A$ si n est impair (on peut bien sûr faire une récurrence pour être totalement rigoureux). Dans les deux cas la matrice est symétrique et vérifie donc la relation (1). Encore une fois, toutes les puissances de matrices symétriques vérifieront (1) puisqu'elles resteront symétriques.
3. C'est complètement trivial : $A^2 = I$ donc A est inversible et $A^{-1} = A$. Alternativement on peut aussi si on veut étaler sa science signaler que $\det(A) = -1$ donc A est inversible.
4. On a déjà signalé deux fois que $A^2 = I$, ce qui prouve que $f \circ f = id$ et donc que f est une symétrie. Pour obtenir le sous-espace par rapport auquel on symétrise, on cherche les vecteurs invariants par f, et on résout donc l'équation $f(u) = u$. Comme $f(x, y) = (y, x)$ (cela découle immédiatement de la matrice A de f dans la base canonique), on cherche donc les vecteurs $u(x, y)$ tels que $(x, y) = (y, x)$. Voila un système pas trop dur à résoudre : $\ker(f - id) = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, 1))$. De même on obtient le sous-espace parallèlement auquel on symétrise en résolvant l'équation $f(u) = -u$, donc $(x, y) = (-y, -x)$ qui donne cette fois-ci $\ker(f + id) = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -1))$. L'application f est donc uns symétrie par rapport à la droite $\text{Vect}((1, 1))$ parallèlement à la droite $\text{Vect}((1, -1))$.
5. La matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique donc vérifie effectivement la relation (1).
6. On peut commencer par calculer $U^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2U$, puis on aura $U^3 = 2U^2 = 4U$ et plus généralement $U^n = 2^{n-1}U$. On le prouve par une récurrence facile : c'est vrai de façon évidente au rang 1, et en supposant que $U^n = 2^{n-1}U$, alors $U^{n+1} = U \times U^n = 2^{n-1}U^2 = 2^nU$, ce qui prouve l'hérédité de notre propriété. Bien sûr, tout multiple d'une matrice vérifiant la relation (1) vérifie aussi cette relation (1) (puisque ${}^t(\lambda M) = \lambda{}^tM$), donc toutes les puissances de la matrice U la vérifieront en effet.
7. Calculons donc $A+C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, et ${}^t(A+C) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le produit de ces deux matrices ne donne pas le même résultat selon le sens dans lequel on l'effectue : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ dans un cas, $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans l'autre. La matrice $A + C$ n'appartient donc pas à E_2, ce qui prouve que cet ensemble n'est pas stable par somme et ne peut donc pas être un espace vectoriel.
8. On calcule brutalement ${}^tM = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, puis ${}^tMM = \begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$ et $M{}^tM = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$. La matrice vérifie donc la relation (1) si ses coefficients sont solution du système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a^2 & + & c^2 & = & a^2 & + & b^2 \\ ab & + & cd & = & ac & + & bd \\ b^2 & + & d^2 & = & c^2 & + & d^2 \end{array}\right.$. Les deux équations extrêmes sont équivalentes à $b^2 = c^2$, donc $c = \pm b$. Supposons dans un premier temps que $c = -b$, alors la denrière équation du système devient $ab - bd = -ab + bd$, donc $2ab = 2bd$, ce qui implique soit $a = d$, soit $b = c = 0$ (et dans ce cas a et d sont complètement quelconques). Deuxième possibilité : $c = b$, et dans ce cas la deuxième équation du système est automatiquement vérifiée. On peut regrouper ce cas avec le cas $b = c = 0$, ce qui fournit en fait toutes les matrices symétriques comme solutions de notre système (c'està-dire un premier sous-espace vectoriel de dimension

3 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$). Les matrices restantes sont toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, c'est-à-dire le sous-espace vectoriel de dimension 2 qu'on peut écrire $\mathrm{Vect}(I, C)$ qui contient en particulier les matrices anty-symétriques (qui sont toutes multiples de la matrice C).

9. On a déjà fait le travail pour l'un des deux sous-espaces, il ne reste en fait qu'à donner une base de l'ensemble des matrices symétriques, ce qui est très facile : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ convient.
10. Si on veut pouvoir trouver un contre-exemple il faut prendre le produit d'une matrice symétrique par une matrice qui ne l'est pas, par exemple $U \times C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'est pas symétrique et n'a pas des coefficients égaux sur la diagonale, donc elle n'appartient pas à E_2, qui n'est pas stable par produit.

B. Étude dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Il suffit de recopier les images des vecteurs de la base canonique en colonnes : $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Un calcul ebouriffant donne $S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Si on est un peu observateur, on remarque que $S^2 = -{}^tS$, et donc ${}^tS^2 = -S$. Du coup, $S\,{}^tS = -SS^2 = -S^3$ et de même pour ${}^tSS$, ce qui prouve que $S \in E_3$. C'est exactement pareil pour S^2 : $S^2\,{}^tS^2 = -S^3$, et $S^2 \in E_3$.
3. Soit donc une matrice $M = aI_3 + bS + cS^2$, alors ${}^tM = aI_3 - bS^2 - cS$ d'après la question précédente. Autrement dit, M et sa transposée sont toutes les deux obtenues comme combinaisons de puissances de la même matrice M, et toutes les puissances commutent entre elles, ce qui prouve que M et ${}^tM$ commutent (on peut expliciter le calcul si on est vraiment courageux).
4. Si on effectue le calcul explicite, on trouve $S^3 = -I_3$ (donc $S^4 = -S$). Du coup, $(aI_3 + bS + cS^2)(dI_3 + eS + fS^2) = adI_3 + (ae + bd)S + (af + be + cd)S^2 + (bf + ce)S^3 + cfS^4 = (ad - bf - ce)I_3 + (ae + bd - cf)S + (af + be + cd)S^2$ appartient toujours au sous-espace vectoriel engendré par I_3, S et S^2, qui est donc bien stable par produit.

C. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

1. On va être obligés de calculer : ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, puis les deux produits ${}^tBB = \begin{pmatrix} 4 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & a-1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 \\ 2 & a+1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B\,{}^tB = \begin{pmatrix} a^2+3 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Ces deux matrices sont en fait égales si et seulement si $a^2 + 3 = 4$ et $a + 1 = 0$ (toutes les autres équations étant équivalentes à une de ces deux là). La seule valeur possible est donc $a = -1$, pour laquelle la matrice B est symétrique et appartient donc logiquement à E_4.

2. On peut écrire explicitement (en prenant $a=-1$) que $h(x,y,z,t)=(x-y+z+t,t-x,x-t,x+y-z+t)$. Un vecteur $u(x,y,z,t)$ appartient donc au noyau de h si $x-y+z+t=t-x=x-t=x+y-z+t=0$. Les deux équations du milieu sont équivalentes et donnent $x=t$, et les deux autres deviennent alors $2x-y+z=2x+y-z=0$, ce qui impose $z=y$ puis $x=0$. Finalement on trouve $\ker(h)=\{(0,y,y,0)\mid y\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((0,1,1,0))$. En particulier ce noyau est de dimension 1, et le théorème du rang assure alors que $\mathrm{Im}(h)$ aura pour dimension 3. On sait par ailleurs que cette image est engendrée par les images des quatres vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$, or les images de $(0,1,0,0)$ et de $(0,0,1,0)$ sont opposées et donc redondantes. Autrement dit, $\mathrm{Im}(h)=\mathrm{Vect}((1,-1,1,1),(-1,0,0,1),(1,1,-1,1))$, et la famille de trois vecteurs obtenue est nécessairement une base de l'image puisqu'elle est génératrice et constituée de trois vecteurs pour un sous-espace dont on sait qu'il est de dimension 3.
3. Calculons donc : $h(1,1,-1,-1)=(-2,-2,2,2)=-2\times(1,1,-1,-1)$; $h(1,0,0,1)=(2,0,0,2)=2\times(1,0,0,1)$ et $h(1,-1,1,-1)=(2,-2,2,-2)=2\times(1,-1,1,-1)$. Ces trois vecteurs ont une image proportionelle à eux-même (il s'agit donc de trois vecteurs propres différents associés pour l'un à la valeur propre 2 et pour les deux autres à la même valeur propre 2).
4. La matrice P est simplement obtenue en écrivant les coordonnées des quatre vecteurs en colonnes : $P=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&1&0&-1\\1&-1&0&1\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}$. Pour calculer son déterminant d, on peut par exemple développer par rapport à la première colonne : $d=-\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\-1&1&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\-1&1&-1\end{vmatrix}$. Chacun des deux déterminant restants est invariant par l'opération $L_3\leftarrow L_1+L_3$, donc $d=-\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&2&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\0&2&0\end{vmatrix}$. On développe à chaque fois par rapport à la dernière ligne : $d=2\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=4+4=8$. Ce déterminant étant non nul, la famille est donc une base de $\mathbb{R}^4$.
5. En notant (u_1,u_2,u_3,u_4) les vecteurs formant la base de la question précédente, les calculs précédents ont prouvé que $h(u_1)=0$, $h(u_2)=-2u_2$, $h(u_3)=2u_3$ et $h(u_4)=2u_4$, donc la matrice représentative de l'application h dans cette base est $D=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$. Or, les formules de changement de base nous assurent que $D=P^{-1}BP$, donc que $B=PDP^{-1}$.
6. C'est une récurrence extrêmement classique : au rang 0, $PD^0P^{-1}=PP^{-1}=I_4=B^0$, et en supposant la formule vérifiée au rang n, alors $B^{n+1}=B\times B^n=PDP^{-1}PD^nP^{-1}=PDD^nP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouve l'hérédité.

   Les puissances paires de D vont simplement faire intervenir trois coefficients égaux à 4^n, ce qui revient à dire qu'on aura toujours $D^{2p}=4^{p-1}D^2$. En découle immédiatement que $B^{2p}=4^{p-1}B^2$. De même, on aura en fait $B^{2p+1}=4^pD$ (cette fois, l'un des coefficients diagonaux est négatif) et donc $B^{2p+1}=4^pB$.