Concours Blanc de mathématiques

PTSI B Lycée Eiffel

13 juin 2020

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + 5y' + 4y = te^{-t}$.

Exercice 2

A. Étude d'une fonction f.

On considère dans cet exercice la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{x} - 1$. On notera $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. Préciser le domaine de définition de la fonction f.
2. Donner le développement limité à l'ordre 2 de f en 0. En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 (on continuera à noter f le prolongement) et que ce prolongement est dérivable en 0. On donnera l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse 0, ainsi que la position relative locale de $\mathcal{C}_f$ et de cette tangente.
3. On pose $h(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \ln(x)$. Étudier les variations de la fonction h, et en déduire son signe.
4. Calculer $f'(x)$ et exprimer le résultat obtenu en faisant intervenir la fonction h étudiée à la question précédente. En déduire les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations complet.
5. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et montrer que $\alpha \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$.
6. Tracer une allure précise de $\mathcal{C}_f$ tenant compte de tous les calculs effectués (on donne $\alpha \simeq 1,25$).

B. Étude d'une suite récurrente.

On s'intéresse dans cette partie à une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$. On notera g la fonction définie par $g(x) = \ln(1+2x)$.

1. Montrer que u_n existe pour tout entier n et que $u_n > 0$.

2. En supposant que (u_n) converge, quelles valeurs peut prendre sa limite L ?
3. On suppose que $u_0 \in]0, \alpha]$.
   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \alpha]$.
   (b) Montrer que (u_n) est croissante et converge vers α.
4. Montrer de façon similaire à la question précédente que (u_n) converge vers α si $u_0 > \alpha$.
5. On suppose désormais que $u_0 = 1$.
   (a) Montrer que l'intervalle $I = [1, \alpha]$ est stable par la fonction g, et que $\forall x \in I$, $|g'(x)| \leqslant \dfrac{2}{3}$.
   (b) En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   (c) Déterminer une valeur de n pour laquelle on peut être sûrs que u_n représente une valeur approchée à 10^{-3} près de α. On en déduira une valeur explicite d'un tel entier n calculée (et justifiée !) **à la main**, sans nécessairement chercher une valeur optimale.
6. (question indépendante du reste de l'exercice) Calculer $\displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt$.

Exercice 3

Le but de ce problème est d'étudier des matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire qui vérifient la relation : $M^tM =^t MM$ (1).

Dans la suite de l'énoncé, on se contentera de dire qu'une telle matrice M vérifie la relation (1).

A. Étude dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Toutes les matrices dans cette partie appartiennent à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On notera en particulier $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

1. Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1).
2. Calculer A^2, puis A^npour tout entier naturel n. En déduire que A^n vérifie toujours la relation (1).
3. Montrer que A est inversible.
4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A. Montrer que f est une symétrie, et préciser ses éléments caractéristiques.
5. Dans toute la suite on notera $U = A + I$. Montrer que la matrice U vérifie la relation (1).
6. Montrer que, pour tout entier non nul n, il existe un réel α_n tel que $U^n = \alpha_n U$. En déduire que toutes les puissances U^n vérifient (1).
7. On note pour la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant la relation (1).
   En vous intéressant à la matrice $A + C$, montrez que E n'est pas un sou-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
8. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur ses coefficients pour qu'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartienne à E_2.
9. En déduire que E_2 est la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on précisera pour chacun une base.
10. L'ensemble E_2 est-il stable par produit matriciel (on pourra réutiliser certaines des matrices introduites précédemment pour cette question) ?

B. Étude dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On notera dans cette partie E_3 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant la relation (1).

On note par ailleurs g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $g(1,0,0) = (0,0,-1)$; $g(0,1,0) = (1,0,0)$ et $g(0,0,1) = (0,1,0)$.

1. Donner la matrice représentative de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On notera dorénavant S cette matrice.
2. Calculer S^2 et montrer que S et S^2 appartiennent à E_3.
3. Montrer que $\text{Vect}(I_3, S, S^2) \subset E_3$.
4. Montrer que le sous-espace vectoriel $\text{Vect}(I_3, S, S^2)$ est stable par multiplication matricielle.

C. Étude d'un exemple dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

On notera dans cette partie E_4 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant la relation (1).

On note par ailleurs h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ ayant pour matrice dans la base canonique
$$B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles $B \in E_4$.
2. On pose pour toute la suite de l'exercice $a = -1$. Déterminer une base de $\ker(h)$ et de $\text{Im}(h)$.
3. Calculer $h(1,1,-1,-1)$, $h(1,0,0,1)$ et $h(1,-1,1,-1)$. Que remarque-t-on ?
4. On note $\mathcal{B} = ((0,1,1,0),(1,1,-1,-1),(1,0,0,1),(1,-1,1,-1))$. Déterminer la matrice de passage P de la base canonique vers la famille $\mathcal{B}$. Calculer le déterminant de cette matrice P. Que peut-on en déduire sur la famille $\mathcal{B}$?
5. Déduire des questions précédentes (**sans** calculer l'inverse P^{-1} de la matrice de passage P) l'existence d'une matrice diagonale D (que l'on précisera) telle que $B = PDP^{-1}$.
6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = PD^nP^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et B^{2p+1} en fonction de B et de B^2 pour tout entier naturel p.