AP n^o 9 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

27 mars 2020

Des suites d'intégrales.

1. En fait $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ dx$ ne se calcule effectivement pas facilement du tout, sauf si on connait la réciproque Argsh de la fonction sh (ce qui n'est a priori pas votre cas) ! On peut retrouver ce résultat en effectuant dans l'intégrale le changement de variable $x = \mathrm{sh}(t)$: on a alors $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(t)} = \sqrt{\mathrm{ch}^2(t)} = \mathrm{ch}(t)$ (en utilisant la formule $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$). Or on aura dans ce cas $dx = \mathrm{ch}(t)\ dt$, numérateur et dénominateur se simplifient donc et on a bêtement $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \int_\alpha^\beta 1\ dt$. Il reste à calculer les nouvelles bornes de l'intégrale après changement de variable : lorsque $x = 0$, $t = 0$ puisque $\mathrm{sh}(0) = 0$, donc $\alpha = 0$. Lorsque $x = 1$, t est solution de l'équation $\mathrm{sh}(t) = 1$, soit $e^t - e^{-t} = 2$. Quitte à tout multiplier par e^t, on a donc $e^{2t} - 2e^t - 1 = 0$, ce qui est une équation du second degré déguisée. On pose $X = e^t$ pour obtenir $X^2 - 2X - 1$, équation dont le discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8$, et qui admet pour racines $X_1 = \dfrac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0$ et $X_2 = \dfrac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2} > 0$. On ne garde que la solution positive X_2, qui conduit à $\beta = \ln(1+\sqrt{2})$. Finalement, $I_0 = \displaystyle\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} 1\ dt = \ln(1+\sqrt{2})$. Les plus courageux vérifieront que la fonction $x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (et la réciproque de la fonction sh), résultat qu'on retrouve d'ailleurs pas le changement de variable effectué plus haut (mais appliqué à une intégrale sans bornes).

   Beaucoup moins de problèmes pour le calcul suivant : $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = [\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \sqrt{2} - 1$.

   Pour le calcul de $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\ dx$, il est malin de poser $u'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ pour obtenir $u(x) = \sqrt{1+x^2}$, et donc $v(x) = x^2$ qui donne $v'(x) = 2x$. On trouve alors $I_3 = [x^2\sqrt{1+x^2}]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}\ dx = \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$.

2. Calculons donc $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{1+x^2}}\ dx$. Le numérateur du quotient sous l'intégrale étant toujours négatif sur $[0,1]$, on en déduit que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, donc la suite est décroissante. De plus, on a toujours $I_n \geqslant 0$ (on intègre une fonction positive), et par ailleurs, $\forall x \in [0,1]$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leqslant 1$, donc $I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\ dx = \frac{1}{n+1}$. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim I_n = 0$.

3. C'est immédiat : $I_n + I_{n-2} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n + x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \int_0^1 \frac{x^{n-2}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\ dx = J_n$.

4. Partons de I_n et effectuons le même type d'IPP que pour le calcul de I_3 : on pose $u'(x) =$

$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, ce qui mène à $u(x)=\sqrt{1+x^2}$, et $v(x)=x^{n-1}$ qui donne $v'(x)=(n-1)x^{n-2}$. On peut alors écrire $I_n=[x^{n-1}\sqrt{1+x^2}]_0^1-\displaystyle\int_0^1(n-1)x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx=\sqrt{2}-(n-1)J_n$. En remplaçant J_n par I_n+I_{n-2} (résultat de la question précédente) et en passant tout à gauche, on se rend compte qu'il y avait une erreur d'énoncé et que la relation est en fait $nI_n+(n-1)I_{n-2}=\sqrt{2}$.

5. La suite (I_n) étant décroissante, on peut certainement écrire que $I_{n-2}\geqslant I_n$, donc $nI_{n-2}\geqslant nI_n$ et $(2n-1)I_{n-2}\geqslant nI_n+(n-1)I_{n-2}=\sqrt{2}$. Quitte à décaler la valeur de n, $(2(n+2)-1)I_n\geqslant\sqrt{2}$, soit $(2n+3)I_n\geqslant\sqrt{2}$. De même, $\sqrt{2}=nI_n+(n-1)I_{n_2}\geqslant(2n-1)I_n$. On peut en déduire par exemple l'encadrement $\sqrt{2}-3I_n\leqslant 2nI_n\leqslant\sqrt{2}+I_n$. Comme on sait que $\lim I_n=0$, le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\lim 2nI_n=\sqrt{2}$, c'est-à-dire que $I_n\sim\dfrac{\sqrt{2}}{2n}$.

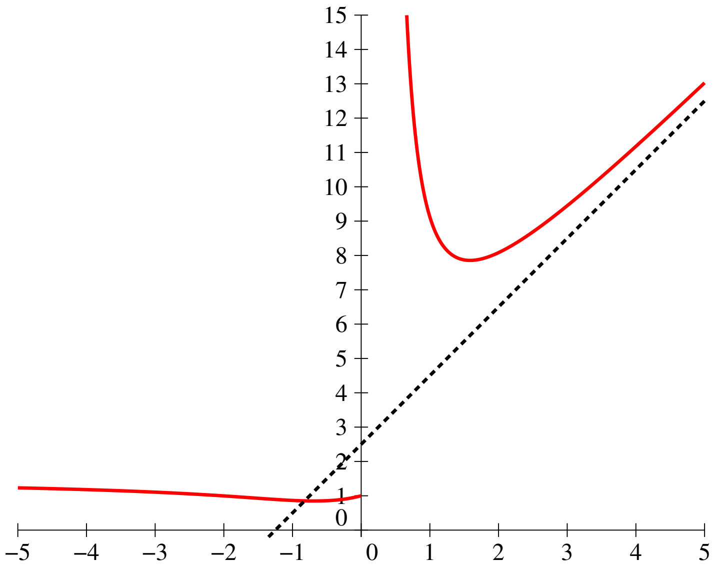
Calculs de DL.

1. On commence par écrire $(\cos(x))^{\tan(x)}=e^{\tan(x)\ln(\cos(x))}$. Faisons le calcul progressivement : $\ln(\cos(x))=\ln\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$ (on applique le DL classique de $\ln(1+u)$ avec $u=-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)$, qui a bien sûr une limite nulle, et comme $u\sim-\dfrac{x^2}{2}$, pas besoin d'aller au-delà de l'ordre 2 puisqu'on aurait $u^2\sim\dfrac{x^4}{4}=o(x^3)$). On multiplie ensuite par le DL bien connu de la fonction tangente pour trouver $\tan(x)\ln(\cos(x))=\left(x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\left(-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=-\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)$. Il ne reste plus qu'à composer par l'exponentielle, ce qui ira encore une fois très vite puisqu'on ne gardera que le premier terme (non constant) du DL : $e^{\tan(x)\ln(\cos(x))}=e^{-\frac{x^3}{2}+o(x^3)}=1-\dfrac{x^3}{2}+o(x^3)$.
2. Il faut ici simplement faire attention à calculer initialement des DL à l'ordre 4 car il va y avoir une simplification par x qui va diminuer le degré : $\dfrac{\sin(x)}{e^x-1}=\dfrac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}=\dfrac{1-\frac{x^2}{6}+o(x^3)}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+o(x^3)}=\left(1-\dfrac{x^2}{6}+o(x^3)\right)\left(1-u+u^2-u^3+o(x^3)\right)$, où on a posé $u=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^3}{24}+o(x^3)$, qui tend vers 0 et qui vérifie $o(u^3)=o(x^3)$. On développe ensuite brutalement : $\dfrac{\sin(x)}{e^x-1}=\left(1-\dfrac{x^2}{6}+o(x^3)\right)\left(1-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{6}x^2-\dfrac{1}{24}x^3+\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{8}x^3+o(x^3)\right)=\left(1-\dfrac{x^2}{6}+o(x^3)\right)\left(1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{12}x^2+o(x^3)\right)=1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{12}x^2-\dfrac{1}{6}x^2+\dfrac{1}{12}x^3+o(x^3)=1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{x^3}{12}+o(x^3)$.
3. On commence par poser $X=\dfrac{1}{x}$ puis par écrire f sous une forme permettant d'effectuer des développements limités par rapport à la variable X (qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$). On calcule donc $f(x)=\dfrac{1}{X}e^{2X}+\sqrt{\dfrac{1}{X^2}+\dfrac{1}{X}+1}=\dfrac{1}{X}(e^{2X}+\sqrt{1+X+X^2})=\dfrac{1}{X}\left(1+2X+2X^2+o(X^2)+1+\dfrac{X+X^2}{2}-\dfrac{1}{8}(X+X^2)^2+o(X^2)\right)$
$=\dfrac{1}{X}\left(1+2X+2X^2+1+\dfrac{X}{2}+\dfrac{3}{8}X^2+o(X^2)\right)=\dfrac{2}{X}+\dfrac{5}{2}+\dfrac{19}{8}X+o(X)$. Il est temps de

revenir à la variable initiale : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 2x + \frac{5}{2} + \frac{19}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$. On en déduit successivement :

- $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(x) - \left(2x + \frac{5}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{19}{8x}$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x - \frac{5}{2} = 0$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = 2x + \frac{5}{2}$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f en $+\infty$.
- De plus comme l'équivalent $\frac{19}{8x}$ est positif au voisinage de $+\infty$, la courbe sera au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Une allure de courbe tracée par ordinateur pour confirmer tout cela :



4. On a déjà vu en cours que $\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$. De plus, en posant $u = -x^2$ et en faisant le DL à l'odre 2 de $(1+u)^{\frac{1}{3}}$ (ce qui sera bien suffisant puisque $u^2 = x^4$), on trouve $\sqrt[3]{1-x^2} = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)$. Il ne reste plus qu'à faire le produit de ces deux développements : $\frac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\cos(x)} = \left(1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\right) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{72}x^4 + o(x^4)$.

Un exercice d'algèbre linéaire.

1. Il suffit de résoudre le système constitué des deux équations définissant G. Puisqu'on a deux équations et trois inconnues, tout ce qu'on peut faire, c'est exprimer deux inconnues en fonction de la troisième. On peut par exemple soutraire la deuxième équation à la première : $x + y = 0$ donc $y = -x$. On remplace ensuite dans la première équation : $3x + 3z = 0$ donc $z = -x$. Finalement, $G = \{(x, -x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1, -1, -1))$. Notre espace est donc de dimension 1 et le vecteur $(1, -1, -1)$ en constitue une base.
2. Ils ne peuvent pas être supplémentaires puisqu'ils ont manifestement un vecteur en commun ! D'ailleurs cela permet de déterminer très facilement leur intersection et leur somme : $(1, -1, -1) \in F \cap G$, donc $F \cap G$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et est nécessairement (au moins)

de dimension 1. Comme $F \cap G$ est nécessairement inclus dans G qui est lui-même de dimension 1, on a nécessairement $F \cap G = G$. On en déduit, via la formule de Grassmann, que $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 1 - 1 = 2$. Comme $F + G$ (par définition) contient le sous-espace vectoriel F qui est lui-même de dimension 2, on a nécessairement $F + G = F$.

Pour compléter notre base de F en une base de $\mathbb{R}^3$, on va essayer de lui ajouter les vecteurs de la base canonique. Commençons pas vérifier si $((1,-1,-1);(1,1,0);(1,0,0))$ est une famille libre. Supposons pour cela $a(1,-1,-1) + b(1,1,0) + c(1,0,0) = 0$, alors on a trivialement $a = b = c = 0$ (la dernière coordonnée impose $c = 0$ puis la deuxième $b = 0$ et la première donne enfin $a = 0$). La famille est donc bien libre, et comme elle est constituée de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, c'est nécessairement une base, pas besoin de continuer les calculs.

3. On cherche maintenant trois réels a, b et c tels que $(1,1,1) = a(1,-1,-1)+b(1,1,0)+c(1,0,0)$. On peut écrire le système correspondant même si ici la résolution va être particulièrement triviale : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & + & c & = & 1 \\ -a & + & b & & & = & 1 \\ -a & & & & & = & 1 \end{array}\right.$, ce qui donne $a = -1$, puis $b = 0$ et $c = 2$, donc, en notant $\mathcal{B}$ la base de la question précédente, $(1,1,1) = (-1,0,2)_{\mathcal{B}}$.

En guise de bonus.

On passe bien sûr tout sous forme exponentielle avant de faire quoi que ce soit : $g(x) = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(1+x)}$. On en déduit pour commencer que $\mathcal{D}_g =]-1,0[\cup]0,+\infty[$. La fonction g est dérivable sur chacun de ses intervalles de définition et $g'(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \left(1+\frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{1+x}\right) \times g(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right) g(x) = \frac{(x-\ln(1+x))g(x)}{x^2}$, qui est donc du signe de $x - \ln(1+x)$. Posons $h(x) = x - \ln(1+x)$, la fonction h est définie et dérivable sur $]-1,+\infty[$, de dérivée $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. La fonction h est donc décroissante sur $]-1,0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$ et atteint son minimum en 0, de valeur $h(0) = 0$. La fonction h est donc toujours positive, et la dérivée g' également. On en déduit que g est strictement croissante sur $]-1,0[$ comme sur $]0,+\infty[$.

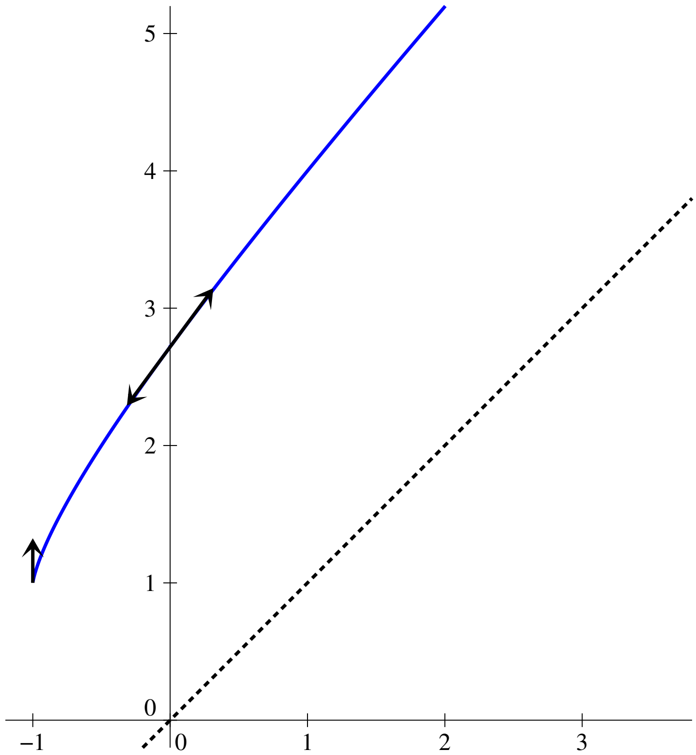
En posant $X = 1 + x$, on peut écrire $g(x) = e^{\frac{X\ln(X)}{X-1}}$. Lorsque x tend vers -1 (nécessairement par valeur supérieure), la variable X a pour limite 0, et on sait bien (croissance comparée) que $\lim\limits_{X\to 0} X\ln(X) = 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = e^0 = 1$. On peut donc prolonger la fonction par contuinuité en -1, mais on ne peut par contre pas y effectuer un calcul de développement limité, et pour cause : la fonction prolongée n'est pas dérivable en -1. En effet, on a $\lim\limits_{x\to -1} \frac{g(x)}{x^2} = 1$ (en reprenant le calcul de limite précédent) et $\lim\limits_{x\to -1^+} x - \ln(1+x) = +\infty$, donc g n'est effectivement pas dérivable en -1 et la courbe représentative de la fonction prolongée admettra une tangente verticale en -1.

En 0, on peut bel et bien effectuer un développement limité pour gérer tous les calculs d'un seul coup : commençons par rappeler que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ (on effectue un développement à l'ordre 3 en anticipant une simplification par x qui va ensuite faire baisser le degré d'une unité), puis $\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x) = \frac{1}{x}(1+x)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) = \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$. Il ne reste plus qu'à passer tout cela dans l'exponentielle : $g(x) = e^{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+o(x^2)} = e \times e^{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+o(x^2)}$. Attention, il était indispensable de factoriser par e avant d'effectuer notre composition. On peut maintenant poser $u = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$ (variable qui tend bien vers 0 quand x tend vers 0), puis écrire $e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2) = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+\frac{x^2}{8}+o(x^2) = 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{24}+o(x^2)$. On en déduit enfin le développement limité espéré : $g(x) = e+\frac{e}{2}x-\frac{e}{24}x^2+o(x^2)$. On en déduit succesivement :

- que $\lim_{x\to 0} g(x) = e$, on peut donc effectuer un prolongement par continuité pour la fonction g en 0.
- que ce prolongement est dérivable et que $g'(0) = \frac{e}{2}$, donc que la tangente à la courbe en son point d'abscisse 0 aura pour équation $y = \frac{e}{2}x + e$.
- que $g(x) - \left(\frac{e}{2}x + e\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{e}{24}x^2$, expression négative au voisinage de 0, donc la courbe sera en-dessous de sa tangente au voisinage de 0.

Reste à étudier ce qui se passe en $+\infty$. On peut bien sûr poser $X = \frac{1}{x}$, et écrire que $g(x) = e^{(1+X)\ln(1+\frac{1}{X})} = e^{(1+X)(\ln(1+X)-\ln(X))}$, avec une variable X qui tend vers 0, mais on ne pourra pas vraiment en faire un vrai développement limité, à cause du $\ln(X)$ dont on ne peut rien faire de bon. Essayons quand même une approche : $(1+X)(\ln(1+X)-\ln(X)) = (1+X)\left(-\ln(X) + X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right) = -\ln(X) - X\ln(X) + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)$, qui est un développement asymptotique valable en 0 (les termes sont bien classés par ordre d'importance décroissante, seul $-\ln(X)$ a une limite infinie, $X\ln(X)$ tend vers 0 par croissance comparée mais $X = o(X\ln(X))$ en 0 puisque $\ln(X)$ a une limite infinie). Il reste à mettre tout ça dans l'exponentielle : $g(x) = e^{-\ln(X)-X\ln(X)+X+\frac{X^2}{2}+o(X^2)} = \frac{1}{X} \times e^{-X\ln(X)+X+\frac{X^2}{2}+o(X^2)}$. On a maintenant le droit de poser $u = -X\ln(X)+X+\frac{X^2}{2}+o(X^2)$ (qui a une limite nulle quand X tend vers 0, mais on va avoir des termes très inhabituels dans le développement : $e^u = 1+u+\frac{u^2}{2}+o(u^2) = 1-X\ln(X)+X+\frac{X^2}{2}+\frac{X^2\ln^2(X)}{2}-X^2\ln(X)+\frac{X^2}{2}+o(X^2)$ (il ne faut pas oublier le premier double produit dans le développement du carré, c'est un terme qui est nettement plus gros que X^2). On finit par obtenir $g(x) = \frac{1}{X}-\ln(X)+1+X\left(\frac{X\ln^2(X)}{2} - X\ln(X) + 1\right)+o(X)$, soit en remontant le changement de variable et en n'oubliant pas que $\ln(X) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$, la formule sympathique $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + \ln(x) + 1 + \frac{\ln^2(x)}{2x} + \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$ (avec toujours les termes classés par ordre de grandeur décroissant). Que peut-on déduire de tout ça ?

- $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$, donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ (limite qu'on pouvait heureusement obtenir bien plus facilement).
- $g(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$, ce qui prouve qu'il n'y a en fait pas d'asymptote oblique. La courbe a en fait une direction de plus en plus proche de celle de la droite d'équation $y = x$, tout en s'en éloignant de plus en plus, pusique l'écart entre les deux est équivalent à $\ln(x)$ qui tend bien sûr vers $+\infty$. Ce genre de phénomène porte un nom (que vous n'avez pas à connaitre) : on parle de branche parabolique oblique de direction $y = x$. Sur la courbe qui suit, on a indiqué en pointillés la droite $y = x$.


5
4
3
2
1
0
−1
0
1
2
3