AP n° 9

PTSI B Lycée Eiffel

27 mars 2020

Des suites d'intégrales.

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

1. Calculer I_0 et I_1, puis I_3 à l'aide d'une IPP intelligente (I_0 est de loin la plus compliquée, on pourra effectuer le changement de variable $x = \mathrm{sh}(t)$).
2. Déterminer la monotonie de la suite (I_n), ainsi que sa limite.
3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $I_n + I_{n-2} = J_n$.
4. À l'aide d'une IPP, montrer que, si $n \geqslant 3$, on a $nI_n + (n-1)I_{n-2} = \sqrt{2}$.
5. Déduire des questions précédentes la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$, ainsi qu'un équivalent simple de I_n.

Calculs de DL.

1. Calculer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \cos(x)^{\tan(x)}$.
2. Calculer le $DL_3(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$.
3. Calculer un développement asymptotique à trois termes en $+\infty$ de $x \mapsto xe^{\frac{2}{x}} + \sqrt{x^2+x+1}$. En déduire l'existence d'une éventuelle asymptote oblique et la position relative de la courbe par rapport à celle-ci.
4. Calculer le $DL_4(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\cos(x)}$.

Un exercice d'algèbre linéaire.

On note pour cet exercice $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = x - 2y + 3z = 0\}$, et $F = \mathrm{Vect}((1,-1,-1);(1,1,0))$.

1. Déterminer une base et la dimension de G.
2. Les sous-espaces F et G peuvent-ils être supplémentaires ? Pourquoi ? Donner une base de $F \cap G$ et en déduire ce que vaut $F + G$. Donner également une base de $\mathbb{R}^3$ obtenue en complétant la base $((1,-1,-1);(1,1,0))$ du sous-espace F.
3. Calculer les coordonnées du vecteur $u = (1,1,1)$ dans la base obtenue à la question précédente.

En guise de bonus.

Étudier le plus complètement possible la fonction g définie par $g(x) = (1+x)^{1+\frac{1}{x}}$ (on insistera en particulier sur le comportement à l'infini, et sur la présence éventuelle de prolongements par continuité).