AP n^o 7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

24 janvier 2020

Un petit exercice de dénombrement.

1. L'ordre est important, les répétitions ne sont bien sûr pas permises, on utilise des arrangements : $\dfrac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ podiums possibles.
2. Puisqu'il y a trois équipes de profs de maths, la seule chose à choisir est l'ordre dans lequel sont situées ces trois équipes sur le podium, ce qui fait $3! = 6$ possibilités.
3. Comptons le nombre de podiums sans profs de maths : puisqu'il n'y a plus que cinq équipes disponibles il vaut (calcul identique à celui de la première question) $\dfrac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$. Par passage au complémentaire, le nombre de podium avec au moins une équipe de profs de maths est donc $336 - 60 = 276$.
4. On choisit une équipe de profs de maths parmi les trois diponibles, deux autres équipes parmi celles qui ne contiennent pas de profs de maths, puis on détermine l'ordre : $\binom{3}{1} \times \binom{5}{2} \times 3! = 3 \times 10 \times 6 = 180$.

Un petit exercice de dénombrement (bis).

1. Puisqu'il s'agit de tirages simultanés et qu'il y a 10 jetons dans l'urne au total, $\binom{10}{4} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$ tirages possibles.
2. Il faut donc choisir deux jetons bleus parmi les six disponibles, et deux jetons rouges parmi les quatre disponibles : $\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} = 15 \times 6 = 90$ possibilités.
3. Il n'y a plus que huit jetons parmi lesquels effectuer nos tirages : $\binom{8}{4} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 70$ possibilités.
4. Une méthode intelligente (suggérée par M.Nagels) consiste à trier les cas selon le nombre de jetons rouges tirés : si on tire les quatre jetons rouges, ils ont bien entendu des numéros différents et il n'y a qu'une seule possibilité ; si on tire trois jetons rouges, on aura donc déjà tiré trois numéros distincts, et il faudra choisir le dernier jeton parmi les trois jetons bleus ayant des numéros différents de deux déjà tirés, ce qui fait $\binom{4}{3} \times \binom{3}{1} = 12$ possibilités ; si on tire deux jetons rouges, il restera quatre numéros possibles chez les bleus parmi lesquels tirer les deux jetons restants, soit $\binom{4}{2} \times 24 = 36$ possibilités ; de même si on ne tire qu'un rouge, il restera cinq numéros possibles chez les bleus et $4 \times \binom{5}{3} = 40$ possibilités ; enfin, si on ne tire pas de jetons rouges, tous les tirages de jetons bleus sont possibles, soit $\binom{6}{4} = 15$ possibilités. Au total, on a donc $1 + 12 + 36 + 40 + 15 = 104$ tirages convenables.

5. Question idiote : pour obtenir une somme égale à 6 avec des tirages simultanés, il faut forcément piocher les deux jetons numérotés 1 et les deux jetons numérotés 2, il n'y a qu'un seul tirage convenable.
6. (a) On va donc maintenant travailler avec des listes, le nombre total de tirages possibles est $10^4 = 10\ 000$.
   (b) Il faut choisir les deux jetons rouges, les deux jetons bleus, et par exemples la position des deux jetons rouges parmi les quatre tirages, soit $4^2 \times 6^2 \times \binom{4}{2} = 16 \times 36 \times 6 = 3456$.
   (c) C'est le même principe que ci-dessus mais avec des listes, $8^4 = 4\ 096$ tirages possibles.
   (d) Pour changer, on va raisonner différemment : soit on ne tire ni 5 ni 6 et donc exactement une fois chacun des quatre autres chiffres, on a pour cela $2^4 \times 4! = 16 \times 24 = 384$ possibilités (il faut choisir la couleur de chaque jeton, et l'ordre) ; soit un tire le 5 mais pas le 6, il y a $\binom{4}{3} \times 2^3 \times 4! = 768$ possibilités (on choisit les trois autres chiffres, puis leur couleur, et enfin l'ordre) ; même chose si on tire le 6 mais pas le 5 ; enfin si on tire à la fois le 5 et le 6, on aura $\binom{4}{2} \times 2^2 \times 4! = 576$ cas. On trouve donc au total $384 + 2 \times 768 + 576 = 2\ 496$, soit en fait exactement 24 fois plus que ce qu'on avait trouvé pour des tirages simultanés, ce qui est bien sûr tout à fait normal puisque, les répétitions étant interdites, seul l'ordre a été ajouté au calcul.
   (e) Il n'y a pas énormément de possibilités d'obtenir 6 en additionnant quatre entiers : soit on a tiré une fois un 3 et trois fois des 1, ce qui donne $2^3 \times 2 \times 4 = 64$ tirages possibles (on choisit les 3, le 1 et sa position parmi les tirages), soit on a tiré deux fois 2 et deux fois 1, ce qui donne $2^2 \times 2^2 \times \binom{4}{2} = 96$ tirages. Il y a donc au total 160 tirages convenables.

Calcul matriciel.

Il existe plusieurs méthodes possibles pour calculer ces fameuses puissances, présentons-en au moins deux. Pour la première méthode, on va bêtement calculer les premières puissances de A pour trouver l'inspiration : $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Pas vraiment besoin d'aller plus loin pour conjecturer la forme générale de la matrice : $A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$. On prouve cette propriété par récurrence : au rang 0, il suffit de poser $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$ pour que la propriété soit vraie. Supposons là maintenant vérifiée au rang n, alors $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v_n & u_n + v_n & u_n + v_n \\ u_n + v_n & 2v_n & u_n + v_n \\ u_n + v_n & u_n + v_n & 2v_n \end{pmatrix}$, qui est bien de la forme attendue en posant $u_{n+1} = 2v_n$ et $v_{n+1} = u_n + v_n$. On remarque de plus que $u_{n+2} = 2v_{n+1} = 2u_n + 2v_n = 2u_n + u_{n+1}$, donc la suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - x - 2 = 0$. Cette équation admet pour racine évidente $x_1 = -1$, et pour deuxième racine $x_2 = 2$, le terme général de la suite (u_n) peut donc s'écrire sous la forme $u_n = A(-1)^n + B \times 2^n$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. La condition initiale $u_0 = 1$ impose $A + B = 1$, et comme $u_1 = 2v_0 = 0$ (on peut aussi le retrouver en regardant simplement la matrice A), on soit aussi avoir $-A + 2B = 0$, soit $A = 2B$, puis $B = \frac{1}{3}$ et $A = \frac{2}{3}$. On en déduit que $u_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$, puis que $v_n = \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$. Il ne reste plus qu'à conclure :

$$A^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Variante possible de cette première méthode : après avoir calculé A^2, on se réveille et on se rend compte qu'on a manifestement $A^2 = A + 2I$. On prouve alors par récurrence que, pour tout entier naturel n, $A^n = a_n A + b_n I$ (c'est vrai au rang 0 en posant $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$, et si on le suppose vrai au rang n, alors $A^{n+1} = (a_n A + b_n I) \times A = a_n A^2 + b_n A = (a_n + b_n)A + 2a_n I)$. On obtient au passage les relations de récurrence $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 2a_n$ qui sont exactement les mêmes que dans le calcul effectué ci-dessus. On trouve donc $a_n = v_n$ et $b_n = u_n$, ce qui donne bien les mêmes valeurs pour les puissances de A.

Dernière méthode possible, utiliser la formule du binôme de Newton en constatant que $A = B - I$, où B est une matrice entièrement constitué de coefficients égaux à 1. On calcule $B^2 = 3B$ puis on prouve très facilement par récurrence que, $\forall n \geqslant 1$, $B^n = 3^{n-1}B$. Les matrices I et B commutent bien entendu, on peut donc appliquer notre formule : $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (-I)^{n-k} = (-1)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 3^{k-1} B = (-1)^n I + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} B = (-1)^n I + \frac{1}{3}((3-1)^n - (-1)^n)B = (-1)^n I + \frac{2^n - 1}{3}(A + I) = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I$. On retrouve à nouveau la même formule.

Un plus gros exercice de dénombrement.

1. Par exemple $\{2, 5\}$ convient. Au maximum, on peut mettre trois éléments dans un sous-ensemble isolé de E_5 (on n'aura d'ailleurs pas le choix pour un tel sous-ensemble, il faudra prendre $\{1, 3, 5\}$). On a bien sûr $I_5^0 = 1$ (le sous-ensemble vide est toujours isolé), $I_5^1 = 5$ (n'importe quel sous-ensemble ne contenant qu'un seul élément sera isolé, il faut donc choisir l'élément). Il y a ensuite $\binom{5}{2} = 10$ sous-ensembles à deux éléments de E_5, dont quatre ne sont **pas** isolés : $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$ et $\{4, 5\}$. On en déduit que $I_5^2 = 6$. Enfin, comme on l'a déjà signalé, $I_5^3 = 1$, et on aura $I_5^p = 0$ si $p > 3$.
2. On aura toujours $I_n^0 = 1$ et $I_n^1 = n$ pour les raisons expliquées à la question précédente. Si n est un entier impair (de la forme $2p + 1$), le plus grand nombre d'éléments qu'on peut placer dans un sous-ensemble isolé sera $p + 1$, avec comme unique possibilité le sous-ensemble $\{1, 3, \dots, 2p - 1, 2p + 1\}$. Dans ce cas, on a donc $I_{2p+1}^{p+1} = 1$ (c'est une généralisation du cas étudié à la question précédente). Si n est pair (de la forme $2p$) c'est plus compliqué, on peut mettre p éléments au maximum dans un sous-ensemble isolé de E_n mais pas de façon unique. Pour les compter, on peut remarquer que les sous-ensembles $\{1, 3, \dots, 2p - 1\}$ et $\{2, 4, \dots, 2p\}$ sont les seuls sous-ensembles isolés « maximaux » (de cardinal p) de E_n ne contenant que des éléments de même parité (ou, si on préfère, un écart de 2 entre tous les éléments de l'ensemble). Pour tous les autres sous-ensembles maximaux, il y aura exactement un endroit où on aura un écart de 3 entre deux éléments successifs du sous-ensemble, et l'emplacement de cet écart peut être choisi de $p - 1$ façons (soit entre le premier et le deuxième élément, ce qui donne le sous-ensemble $\{1, 4, 6, \dots, 2p\}$; soit entre le deuxième et le troisième pour obtenir $\{1, 3, 6, \dots, 2p\}$, etc, jusqu'à l'écart mis entre les deux derniers éléments pour trouver $\{1, 3, 5, \dots, 2p - 3, 2p\}$. On a donc au total $E_{2p}^p = 2 + (p - 1) = p + 1$.
3. On peut en fait reprendre le raisonnement de la question 1 : il y a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ sous-ensembles à deux éléments de E_n, parmi lesquels exactement $n - 1$ ne sont pas isolés ($\{1, 2\}$;

$\{2,3\}$; ... ;$\{n-1,n\}$). Il en reste donc $\dfrac{n(n-1)}{2}-(n-1)=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ qui sont isolés.

4. Soit donc un sous-ensemble isolé à p éléments de E_{n+1}. Deux possibilités incompatibles : soit il ne contient pas l'éléments $n+1$ et il est alors également un sous-ensemble isolé de E_n (et réciproquement tout sous-ensemble isolé de E_n en est aussi un de E_{n+1}), il y a donc exactement I_n^p sous-ensembles de cette forme ; soit il contient l'élément $n+1$ et ne peut donc pas contenir l'élément n puisqu'il est isolé. On peut alors simplement le « compléter » à l'aide de $p-1$ éléments formant un sous-ensemble isolé de E_{n-1} (et à nouveau, réciproquement, tout sous-ensemble isolé à $p-1$ éléments de E_{n-1} auquel on ajoute l'élément $n+1$ formera un sous-ensemble isolé à p éléments de E_{n+1}). Il y a donc I_{n-1}^{p-1} sous-ensembles de cette forme. Au total on a bien $I_{n+1}^p=I_n^p+I_{n-1}^{p-1}$.

5.

	p=0	p=1	p=2	p=3
n=0	1			
n=1	1	1		
n=2	1	2		
n=3	1	3	1	
n=4	1	4	3	
n=5	1	5	6	1
n=6	1	6	10	5

6. On va procéder par récurrence, mais attention à être précis sur l'entier qui va faire l'objet de la récurrence (puisqu'il on a deux variables n et p dans notre formule). On va donc fixer une bonne fois pour toutes l'entier p, et faire varier n à partir de $n=p-1$ pour effectuer une récurrence sur n. Initialisons donc à $n=p-1$, la formule affirme alors que $\dbinom{p-1}{p-1}=\dbinom{p}{p}$, ce qui est vrai (les deux nombres étant égaux à 1. Supposons donc la formule vraie pour un certain entier n et tentons de la prouver pour $n+1$. Le membre de gauche de l'égalité est alors égal à $\dbinom{p-1}{p-1}+\dbinom{p}{p-1}+\dbinom{p+1}{p-1}+\cdots+\dbinom{n}{p-1}+\dbinom{n+1}{p-1}=\dbinom{n+1}{p}+\dbinom{n+1}{p-1}$ en exploitant l'hypothèse de récurrence. Il suffit alors d'invoquer la formule de Pascal pour conclure : $\dbinom{n+1}{p}+\dbinom{n+1}{p-1}=\dbinom{n+2}{p}$, ce qui prouve exactement la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

7. D'après la question 4, on a $I_n^3=I_{n-1}^3+I_{n-2}^2$. Or, $I_{n-2}^2=\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}=\dbinom{n-3}{2}$, donc $I_n^3=I_{n-1}^3+\dbinom{n-3}{2}=I_{n-2}^3+\dbinom{n-4}{2}+\dbinom{n-3}{2}=\cdots=I_0^3+\displaystyle\sum_{k=2}^{n-3}\dbinom{k}{2}=\dbinom{n-2}{3}$ en utilisant la question précédente (et bien sûr le fait que $I_0^3=0$). Il faudrait faire une petite récurrence pour être hyper rigoureux. C'est exactement la même chose ensuite : $I_n^4=I_{n-1}^4+I_{n-2}^3=\cdots=I_0^4+\displaystyle\sum_{k=3}^{n-4}\dbinom{k}{3}=\dbinom{n-3}{4}$.

8. On conjecture $I_n^p=\dbinom{n-p+1}{p}$ et on le démontre exactement comme ci-dessus (en faisant une récurrence sur p).

Des histoires de matrices.

1. Aucune méthode n'était imposée, faisons donc un bon vieux pivot de Gauss :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & 12 & -1 \\ 0 & 12 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & 12 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 9 & 12 & -12 \\ 3 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 15 & 18 & -21 \\ 3 & 6 & -3 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow L_2/12 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 3 & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Calculons : $P - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, puis $(P-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, et $(P-I)^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, ce qui est exactement égal à $2P$. On a donc $(P-I)^3 - 2P = 0$, soit en développant tout $P^3 - 3P^2 + P - I = 0$. On peut écrire cette égalité sous la forme $P(P^2 - 3P + I) = I$, la matrice P est donc inversible, d'inverse $P^2 - 3P + I$. On peut alors calculer $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (on vérifie si on le souhaite que ça marche).
3. On calcule encore une fois brillamment $AP = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. De façon extrêmement inattendue, on obtient exactement la même chose pour PT (mais si) !
4. C'est une récurrence hyper classique : pour $n = 0$, on a bien $PT^0P^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$, et si on suppose la formule vraie au rang n, en utilisant le calcul précédent, on aura $A^{n+1} = A \times A^n = APT^nP^{-1} = PTT^nP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}$, ce qui prouve la formule au rang $n+1$. Regardons ce qui se passe pour $n = -1$: on calcule d'abord $A^{-1}P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On vérifie facilement que cette matrice est l'inverse de la

matrice T, ce qui prouve que $P^{-1}A^{-1}P = T^{-1}$, ce qui est équivalent à ce qui était demandé. La formule reste donc vraie pour $n = -1$.

5. On va évidemment procéder par récurrence. La propriété est vraie au rang 0 en posant $\alpha_0 = 0$, et aussi au rang 1 en posant $\alpha_1 = 1$. Supposons que ça marche au rang n, alors $T^{n+1} = T \times \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 2\alpha_n + 2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$, ce qui est bien de la forme souhaitée avec $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n$. Cette suite n'est pas une suite classique, hélas, donc on ne peut pas faire grand chose avec (oui, l'énoncé de la question était un ignoble piège).
6. On pose donc $J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et on obtient immédiatement $J^k = \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-3)^{k-2}J^2$, pour tout entier $k \geqslant 2$. Si on tient vraiment à le démontrer par récurrence, on le fait (mais c'est trivial).
7. Puisque $T = J + 2I$, on va appliquer la formule du binome (les matrice $2I$ et J commutant bien évidemment) : $T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (2I)^{n-k} = 2^n I + n2^{n-1}J + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}(-3)^{k-2}J^2 = 2^n I + n2^{n-1}J + \frac{1}{9}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-3)^k 2^{n-k}J^2 - 2^n J^2 + 3n2^{n-1}J^2\right) = 2^n I + n2^{n-1}J + \frac{((3n-2)2^{n-1} + (-1)^n)}{9}J^2$.
Il n'est en fait pas vraiment utile de détailler le calcul de tous les coefficients de T^n, puisqu'on les connait déjà tous sauf celui égal à α_n (rien n'empêche bien entendu de vérifier que ça donne bien les bonnes valeurs sur la diagonale, ce qui est le cas). On déduit de la formule précédente que $\alpha_n = n2^{n-1}$ (seule la matrice J a un coefficient non nul à cet endroit), ce qui est cohérent avec la relation de récurrence trouvée pour la suite : $2\alpha_n + 2^n = n2^n + 2^n = (n+1)2^n = \alpha_{n+1}$. Finalement, $T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Il reste ensuite à calculer
$PT^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 2^{n+1} & n2^n \\ 0 & 2^n & (n+2)2^{n-1} \\ (-1)^n & 2^{n+1} & (n+1)2^n \end{pmatrix}$, puis
$A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} (2-n)2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} + 2(-1)^{n+1} & (n-2)2^n + 2(-1)^n \\ -n2^{n-1} & 2^n & n2^{n-1} \\ (1-n)2^n + (-1)^{n+1} & 2^{n+1} + 2(-1)^{n+1} & (n-1)2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}$.
8. (a) Supposons que $AM = MA$, alors $AMP = MAP = MPT$, puis $P^{-1}AMP = P^{-1}MPT$, soit $TP^{-1}MP = P^{-1}MPT$. La matrice $P^{-1}MP$ commute bien avec T. La réciproque se fait exactement de la même façon.

   (b) Bourrinons en posant $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a alors $BT = \begin{pmatrix} -a & 2b & b+2c \\ -d & 2e & e+2f \\ -g & 2h & h+2i \end{pmatrix}$, et $TB = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 2d+g & 2e+h & 2f+i \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix}$. Les deux matrices sont égales si $b = c = d = g = h = 0$ (conditions obtenus facilement en regardant les coefficients hors de la diagonale), et $e = i$ (à cause du coefficient deuxième ligne troisième colonne). Autrement dit,
   $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

   (c) Le calcul de la question a prouve que les matrices commutant avec A sont de la forme

PBP^{-1}, où B commute avec T. On calcule donc $PB = \begin{pmatrix} a & 2e & 2f \\ 0 & e & e+f \\ a & 2e & e+2f \end{pmatrix}$, puis $PBP^{-1} = \begin{pmatrix} -a+2e-2f & -2a+2e & 2a-2e+2f \\ -f & e & f \\ -a+e-2f & -2a+2e & 2a-e+2f \end{pmatrix}$. Toutes les matrices de cette forme commutent donc avec A (en particulier A elle-même, qui est obtenue pour $a=-1$, $e=2$ et $f=1$, et la matrice identité obtenue lorsque $a=e=1$ et $f=0$).