AP : Séance n° 7

PTSI B Lycée Eiffel

24 janvier 2020

Un petit exercice de dénombrement.

Lors d'un championnat de bridge, huit équipes se disputent les trois places du podium. Parmi elles, trois sont constituées de profs de maths.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles (il va de soi que l'ordre est important) ?
2. Combien de podiums sont entièrement constitués de profs de maths ?
3. Combien de podiums contiennent au moins une équipe de profs de maths ?
4. Combien de podiums contiennent exactement une équipe de profs de maths ?

Un petit exercice de dénombrement (bis).

Une urne contient 6 jetons bleus numérotés de 1 à 6, et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4. On tire simultanément quatre jetons dans l'urne.

1. Quel est le nombre total de tirages possibles ?
2. Combien de tirages pour lesquels on tire deux jetons de chaque couleur ?
3. Combien de tirages sans tirer le chiffre 2 ?
4. Combien de tirages où on obtient quatre numéros différents ?
5. Combien de tirages pour lesquels la somme des numéros tirés vaut 6 ?
6. Refaire tout l'exercice avec des tirages successifs avec remise.

Calcul matriciel.

Calculer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ par la méthode de votre choix. La matrice A est-elle inversible (si oui, donner son inverse) ?

Un plus gros exercice de dénombrement.

Dans tout cet exercice, on note $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$ (avec $n \geqslant 1$), et on dit qu'un sous-ensemble de E_n est isolé s'il ne contient pas deux entiers consécutifs. Ainsi, $\{2, 5, 7\}$ est un sous-ensemble isolé de E_8, mais $\{2, 3, 5, 7\}$ n'en est pas un puisqu'il contient les entiers consécutifs 2 et 3. On notera pour la suite de l'exercice I_n^p le nombre de sous-ensembles isolés de E_n contenant exactement p éléments.

1. Donner un exemple de sous-ensemble isolé de E_5 contenant deux éléments. Combien d'éléments peut contenir au maximum un sous-ensemble isolé de E_5 ? En déduire les valeurs de I_5^p pour tous les entiers naturels p.
2. Dans le cas général, préciser les valeurs de I_n^0, I_n^1 et I_n^k, où k est le plus grand entier pour lequel $I_n^k \neq 0$ (on précisera en passant la valeur de k).

3. Démontrer que $I_n^2 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$ (un raisonnement rigoureux est attendu).
4. On suppose dans cette question que $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 1$. Démontrer que $I_{n+1}^p = I_n^p + I_{n-1}^{p-1}$ (on distinguera les sous-ensemble isolés de E_{n+1} contenant l'élément $n+1$ et ceux qui ne le contiennent pas).
5. Calculer toutes les valeurs de I_n^p pour $n \leqslant 6$ (on pourra présenter les résultats sous forme d'un tableau similaire au triangle de Pascal).
6. Montrer que, $\forall p \geqslant 1$, $\forall n \geqslant p-1$, on a la relation :
$$\binom{p-1}{p-1} + \binom{p}{p-1} + \binom{p+1}{p-1} + \cdots + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p}$$
7. En déduire que $I_n^3 = \dbinom{n-2}{3}$, puis $I_n^4 = \dbinom{n-3}{4}$.
8. Conjecturer et démontrer une formule générale pour I_n^p.

Des histoires de matrices.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $(P - I_3)^3 - 2P$. En déduire que P est inversible, et déterminer P^{-1}.
3. Comparer les matrices AP et PT.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$. Cette formule reste-t-elle valable pour $n = -1$?
5. Montrer que, pour tout entier naturel n, T^n est de la forme $T^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & u_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$, et déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n). De quel type de suite s'agit-il ?
6. On pose $J = T - 2I_3$. Calculer les premières puissances de J (jusqu'à J^3), puis déterminer J^k pour tout entier k.
7. En déduire une expression détaillée de T^n, puis de A^n.
8. Une application des résultats précédents : le calcul du commutant de A.
   (a) Montrer qu'une matrice M commute avec A si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec T.
   (b) Déterminer toutes les matrices commutant avec la matrice T.
   (c) En déduire l'ensemble des matrices commutant avec la matrice A.