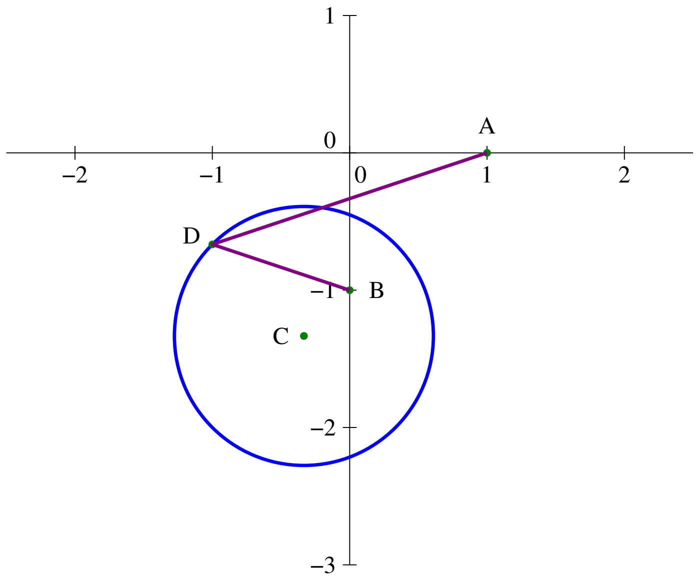
AP n° 6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

6 décembre 2019

Quelques exercices sur les complexes.

1. S'il y avait un 1 à droite du signe égal, on pourrait s'en sortir facilement en constatant que la condition $|z-1| = |z+i|$ revient à dire que le point M d'affixe z se situe sur la médiatrice du segment reliant les points A d'affixe 1, et B d'affixe $-i$. Avec un 2, c'est nettement plus compliqué, on peut toujours écrire (en élevant tout au carré pour simplifier le calcul ultérieur) $|z-1|^2 = 4|z+i|^2$. On pose alors très brutalement $z = a+ib$, et on développe l'équation : $|a-1+ib|^2 = 4|a+i(b+1)|^2$, soit $(a-1)^2+b^2 = 4a^2+4(b+1)^2$, donc $a^2-2a+1+b^2 = 4a^2+4b^2+8b+4$. En passant tout à droite et en divisant par 3, on obtient $a^2+b^2+\frac{2}{3}a+\frac{8}{3}b+1 = 0$. On reconnait une équation de cercle, qu'on met sous la forme habituelle : $\left(a+\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} + \left(b+\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{16}{9} + 1 = 0$, soit encore $\left(a+\frac{1}{3}\right)^2 + \left(b+\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$. Il s'agit donc d'un cercle de centre $C\left(-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}i\right)$ et de rayon $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Une illustration ci-dessous, on a indiqué en plus les distances du point $D\left(-1-\frac{2}{3}i\right)$ (qui appartient au cercle solution) aux deux points A et B. On a normalement $DA = 2DB$.



2. Le nombre $\frac{z-1}{z+i}$ donc être imaginaire pur « positif » (en effet, l'angle est indiqué modulo 2π, il faut donc que la partie imaginaire de notre imaginaire pur soit positive). En posant encore une fois $z = a+ib$, on calcule donc $\frac{z-1}{z+i} = \frac{a-1+ib}{a+i(1+b)} = \frac{(a-1+ib)(a-i(1+b))}{a^2+(b+1)^2}$. En oubliant le dénominateur qui est un réel strictement positif, notre nombre est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle, donc si $a^2-a+b+b^2 = 0$. On reconnait à nouveau une équation

de cercle : $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$, c'est-à-dire le cercle de centre $I\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En fait, on constate aisément qu'il s'agit du cercle dont le centre I est le milieu du segment $[AB]$, et le rayon la moitié de la distance AB, autrement dit du cercle de diamètre $[AB]$. Ce qui n'a rien de surprenant si on se rappelle de certains théorèmes de géométrie vus au collège : un point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle AMB est un triangle rectangle en M. Revenons à notre deuxième condition : la partie imaginaire de $\frac{z-1}{z+i}$ est positive si $-a-ab+1+b+ab\geqslant 0$, soit $b\geqslant a+1$. Ceci revient à dire que le point d'affixe z doit être situé dans le plan complexe au-dessus de la droite d'équation $y=x+1$, qui n'est en fait autre que la droite (AB). On obtient finalement un demi-cercle de solutions (si on veut être très rigoureux, on doit éliminer les points A et B, qui sont les extrémités de ce demi-cercle et ne peuvent pas être considérés comme solutions du problème initial).

3. On peut commencer par remplacer $|\overline{z}|$ par $|z|$, c'est la même chose. La condition $|z^2|=|z|$, ou $|z|^2=|z|$ implique $|z|=0$ (mais 0 n'est pas solution du problème), ou $|z|=1$. Plein de façon possibles de gérer ensuite l'égalité avec $|z-1|$, pour faire original on peut poser $z=e^{i\theta}$ (puisqu'on sait déjà que z doit être de module 1), et calculer $|z-1|$ en factorisant par l'angle moitié : $|z-1|=|e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}})|=\left|e^{i\frac{\theta}{2}}\times\left(-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right|=2\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|$. Comme on veut que ce module soit égal à 1, il faut donc que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}$, soit $\frac{\theta}{2}\equiv\pm\frac{\pi}{6}[2\pi]$ ou $\frac{\theta}{2}\equiv\pm\frac{5\pi}{6}[2\pi]$, ce qui ne donne après multiplication que deux valeurs possibles pour z : $z=e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, ou $z=e^{-i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. (a) On commence bien sûr par effectuer le changement de variable $Z=z^2$ pour se ramener à l'équation du second degré $Z^2-(3+8i)Z-16+12i=0$. Calculons le discriminant de cette équation : $\Delta=(3+8i)^2-4(-16+12i)=9+48i-64+64-48i=9$. Coup de chance, le discriminant étant réel, on n'a pas besoin de calcul supplémentaires pour déterminer les solutions de l'équation : $Z_1=\frac{3+8i-3}{2}=4i$, et $Z_2=\frac{3+8i+3}{2}=3+4i$. Il reste à calculer les racines carrées de ces deux nombres pour retrouver les solutions de l'équation initiale. Inutile de beaucoup se fatiguer pour Z_1, on peut écrire $Z_1=4e^{i\frac{\pi}{2}}$ et en déduire immédiatement que $z_1=2e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ est une de ces racines carrées. La deuxième est bien entendu son opposé $z_2=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$. Pour Z_2, on revient à la méthode habituelle en posant $z=a+ib$ et en écrivant que $z^2=3+4i$ si et seulement si $a^2-b^2=3$ et $2ab=4$. On ajoute comme toujours à ces deux équations la condition sur le module $|z|^2=a^2+b^2=|Z_2|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$. En ajoutant et soustrayant les équations extrêmes (comme d'habitude, quoi), on trouve $2a^2=8$, donc $a=\pm 2$; et $2b^2=2$, donc $b=\pm 1$. Comme a et b doivent être de même signe pour satisfaire la troisième équation $2ab=4$, on garde donc les racines $z_3=2+i$ et $z_4=-2-i$. L'équation initiale du quatrième degré admet donc quatre solutions : $\mathcal{S}=\{\sqrt{2}+i\sqrt{2},-\sqrt{2}-i\sqrt{2},2=i,2-i\}$.

   (b) Deux possibilités pour simplifier cette équation de degré 3 : soit on se rend compte que $z=-i$ est racine évidente, soit on ne s'en rend pas compte mais on sait factoriser des différences de cubes : $z^3-i=z^3-(-i)^3=(z+i)(z^2-iz-1)$, l'équation dévient alors $(z+i)(z^2-iz-7)=0$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta=-1+28=27$, et admet donc pour racines $z_1=\frac{i+3\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\frac{i-3\sqrt{3}}{2}$. Il y a donc trois solutions à l'équation initiale : $\mathcal{S}=\left\{-i,\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right\}$.

   (c) Cette équation revient à dire que $z^4=2\,\mathrm{Re}(z)$. En particulier, z^4 est un nombre réel, ce qui implique $\arg(z^4) \equiv 0[\pi]$, donc $4\arg(z) \equiv 0[\pi]$, et $\arg(z) \equiv 0 \left[\frac{\pi}{4}\right]$. Distinguons plusieurs cas, en commençant par $z = a \in \mathbb{R}$ (ce qui revient, modulo 2π, à avoir un argument égal à 0 ou à π). L'équation devient alors $a^4 = 2a$, soit $a(a^3?2) = 0$, ce qui nous donne comme premières solutions $a = 0$ et $a = \sqrt[3]{2}$. Passons maintenant au cas où $z = bi \in i\mathbb{R}$ (argument égal à $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$), ce qui nous ramène à l'équation $b^4 = 0$, qui n'a donc pas d'autre solution que $z = 0$ qu'on avait déjà obtenue. Cas suivant, quand $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi]$, ce qui revient à dire que $z = c(1+i) = c + ci$, avec $c \in \mathbb{R}$. On a alors $z^4 = c^4(1+i)^4 = c^4(2i)^2 =?4c^4$. On est donc ramenés à l'équation $-4c^4 = 2c$, soit $2c(1+2c^3) = 0$. On retrouve logiquement encore une fois la solution nulle, ainsi que $c = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$, soit encore $z = \frac{-1-i}{\sqrt[3]{2}}$. Dernier cas très similaire pour la route : si $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$, ce qui revient à dire que $z = d(1-i)$. On trouve alors $z^4 = d^4(1-i)^4 = d^4(-2i)^2 = -4d^4$. Même conclusion que tout à l'heure, on trouve $z = \frac{-1+i}{\sqrt[3]{2}}$. On a fini le tour, il y a donc quatre solutions au total.

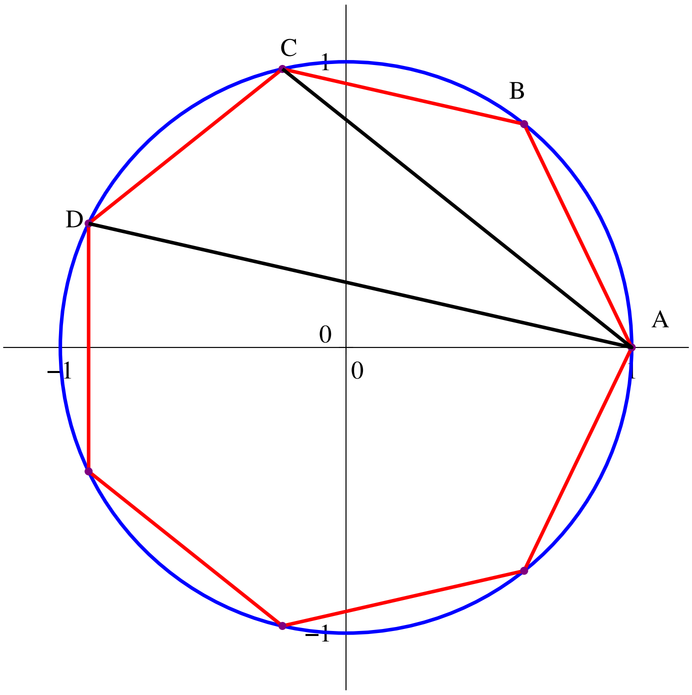
5. En appliquant la formule du cours, on en déduit que l'application r tranforme le point d'affixe z en un point d'affixe z' vérifiant $z' = e^{i\frac{\pi}{6}}(z-i)+i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(z-i)+i = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i$ (on notera abusivement $z' = r(z)$ pour la suite de l'exercice, et de même pour les autres isométries manipulées dans les calculs qui suivent). De même, on aura $r'(z) = -i(z-1)+1 = -iz+1+i$. On calcule alors tout simplement $r \circ r'(z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(-iz + i+1) + \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$. L'application $r \circ r'$ est bien entendu une isométrie (expression de la forme $z \mapsto az+b$ avec $a \in \mathbb{U}$), et même une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ vu la valeur du coefficient a (ce qui est évidemment normal quand on compose des rotations d'angles respectifs $\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{2}$, on ajoute les angles). Il ne reste plus qu'à déterminer son centre en cherchant son point fixe : pour cela on résout l'équation $r \circ r'(z) = z$, soit (en multipliant tout par 2) $(1 - i\sqrt{3})z + \sqrt{3} + 3i = 2z$, donc $z = \frac{\sqrt{3}+3i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. La rotation $r \circ r'$ est donc la rotation de centre $C(\sqrt{3})$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

   Même principe pour l'autre composée : $r' \circ r(z) = -i\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z + \frac{1}{2} + \frac{2-\sqrt{3}}{2}i\right) + i + 1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \frac{1}{2}i + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i + 1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + \frac{4-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. On retrouve une fois de plus très naturellement une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$, donc on va rechercher le point fixe en résolvant l'équation (à nouveau en multipliant tout par 2) $(1-i\sqrt{3})z + 4 - \sqrt{3} + i = 2z$, soit $z = \frac{4-\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(4-\sqrt{3}+i)(1-i\sqrt{3})}{1+3} = \frac{4+i(4-4\sqrt{3})}{4} = 1 + (1-\sqrt{3})i$. L'application $r' \circ r$ est donc la rotation de centre $D(1+i(1-\sqrt{3}))$ et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

6. Supposons donc que le triangle ABC est équilatéral direct, et rappelons que les racines cubines 1, j et j^2 vérifient l'égalité $1 + j + j^2 = 0$. Le triangle est équilatéral direct si et seulement si $c - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$ (en effet, cela revient à dire que C est l'image de B par la rotation de centre

A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$), ou encore $c - e^{i\frac{\pi}{3}}b + a(e^{i\frac{\pi}{3}} - 1) = 0$. Or, $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$, donc $e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = -1 - j^2 = j$. On trouve donc la première condition équivalente $c + j^2 b + ja = 0$. Bien entendu, en multipliant par j ou j^2, on trouve les conditions symétriques $jc + b + j^2 a = 0$ et $j^2 c + jb + a = 0$ (en utilisant que $j^3 = 1$). Si le triangle est équilatéral indirect, on aurait de même (en inversant le rôle de b et de c) les conditions $a + jc + j^2 b = ja + j^2 c + b = j^2 a + c + jb = 0$.

7. Il suffit de prouver la formule pour un heptagone régulier particulier, et elle sera vraie pour tous les autres (au pire, toutes les distances seront multipliées par une même constante, ce qui ne change rien). Tant qu'à faire, prenons un heptagone régulier qu'on connait bien, celui formé par les racines septièmes de l'unité dans le plan complexe. Quitte à décider de renommer les points, on peut choisir $z_A = 1$, $z_B = e^{i\frac{2\pi}{7}}$, $z_C = e^{i\frac{4\pi}{7}}$ et $z_D = e^{i\frac{6\pi}{7}}$:



Il faut alors calculer les distances entre ces points en utilisant l'astuce classique de la factorisation par l'angle moitié : $AB = |z_B - z_A| = |e^{i\frac{2\pi}{7}} - 1| = |e^{i\frac{\pi}{7}}(e^{i\frac{\pi}{7}} - e^{-i\frac{\pi}{7}})| = \left|2i\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right| = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)$ (on a au passage fait disparaitre le i et le $e^{i\frac{\pi}{7}}$ à l'intérieur des modules puisque ces deux nombres ont un module égal à 1). Un calcul identique prouve que $AC = 2\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$ et que $AD = 2\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)$. Prouver que $\dfrac{1}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$ revient alors (quitte à tout mettre au même dénominateur) à montrer que $AC \times AD - AB \times AD - AB \times AC = 0$, soit $\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right) = 0$. En appliquant des transformations somme-produit à chacun de ces trois termes (et en simplifiant par 2 en passant), notre égalité est donc équivalente à $\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\dfrac{5\pi}{7}\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) = 0$, ce qui est bien vrai puisque $\cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{4\pi}{7}\right) = -\cos\left(\dfrac{4\pi}{7}\right)$, et $\cos\left(\dfrac{5\pi}{7}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{2\pi}{7}\right) = -\cos\left(\dfrac{2\pi}{7}\right)$. Maintenant, vous me refaites une démonstration purement géométrique de ce fascinant résultat.

Et quelques-uns sur les suites.

1. La suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2-2x+2=0$. Cette équation a pour discriminant $\Delta = 4-8 = -4$ et admet deux racines complexes conjuguées $z_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$ et $z_2 = 1-i$. On met sans difficulté z_1 sous forme exponentielle : $z_1 = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$. On peut alors affirmer qu'il existe deux constantes réelles A et B telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(A\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)+B\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right)2^{\frac{n}{2}}$. Les conditions initiales se traduisent par $u_0 = A = 1$ et $u_1 = \left(A\dfrac{\sqrt{2}}{2}+B\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\sqrt{2} = 3$, donc $A+B=3$ et $B=2$. Il ne reste plus qu'à conclure : $u_n = \left(\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)+2\sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)\right)2^{\frac{n}{2}}$.
2. Cette suite-là n'est pas récurrente linéaire d'ordre 2, mais elle peut le devenir ! Tous les termes de la suite étant strictement positifs (récurrence double triviale), on peut appliquer un coup de ln autour de la relation de récurrence, pour obtenir $\ln(u_{n+2}) = \dfrac{1}{2}(9\ln(u_{n+1})-4\ln(u_n))$. En posant $v_n = \ln(u_n)$, on a donc $v_{n+1} = \dfrac{9}{2}v_{n+1}-2v_n$. Cette fois, on a bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2-\dfrac{9}{2}x+2=0$. Son discriminant vaut $\Delta = \dfrac{81}{4}-8 = \dfrac{49}{4}$, et on a deux racines réelles $r_1 = \dfrac{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}{2} = 4$ et $r_2 = \dfrac{\frac{9}{2}-\frac{7}{2}}{2} = \dfrac{1}{2}$. On peut donc écrire $v_n = A\times 4^n+\dfrac{B}{2^n}$, avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$. Les conditions initiales donnent $v_0 = \ln(1) = 0 = A+B$, et $v_1 = \ln(2) = 4A+\dfrac{B}{2}$. On en déduit $A = \dfrac{2\ln(2)}{7}$ et $B = -\dfrac{2\ln(2)}{7}$. Conclusion : $v_n = \dfrac{2\ln(2)}{7}\left(4^n-\dfrac{1}{2^n}\right)$, puis $u_n = e^{v_n} = 2^{\frac{2}{7}(4^n-\frac{1}{2^n})}$.
3. On va essayer d'appliquer le théorème de convergence monotone. Les premiers termes de la suite sont $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{12}$, et $u_3 = \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6} = \dfrac{37}{60}$, ce qui laisse penser que la suite est croissante. Calculons donc $u_{n+1}-u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \sum_{k=2}^{n+2}\frac{1}{n+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1} = \frac{2n+2+2n+1-2(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$, la suite est donc bien croissante. Il reste à la majorer : u_n est une somme de n termes dont le plus grand est égal à $\dfrac{1}{n+1}$ (le premier de la somme), donc $u_n \leqslant \dfrac{n}{n+1} < 1$. La suite étant croissante et majorée, elle converge, mais on ne sait pas vers quoi. Tout ce qu'on peut dire sur la limite au vu des calculs effectués est qu'elle est inférieure ou égale à 1 (en fait la suite (u_n) converge vers $\ln(2)$).
4. Il faut penser à appliquer le théorème des gendarmes, en se rappelant que la définition de la partie entière implique que $kx-1 < \mathrm{Ent}(kx) \leqslant kx$. On en déduit (en sommant de telles inégalités) que $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}kx$. Or, on sait très bien calculer les sommes intervenant dans cet encadrement (quitte à sortir la constante x de la somme) : $\dfrac{1}{n^2}\left(\dfrac{xn(n+1)}{2}-n\right) \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}\times\dfrac{xn(n+1)}{2}$, soit $\dfrac{(n+1)x-2}{2n} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{(n+1)x}{2n}$. Les membres extrêmes de cet encadrement ont tous les deux la même limite $\dfrac{x}{2}$ quand n tend vers $+\infty$, donc on peut conclure que $\lim u_n = \dfrac{x}{2}$.

5. Commençons par déterminer la monotonie des deux suites : $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \sum_{k+1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) = \frac{2}{2\sqrt{n+2}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} > 0$ puisque $2\sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$ (on a utilisé la multiplication par la quantité conjuguée de façon très inhabituelle en cours de route). La suite (u_n) est donc croissante. De même, on calcule $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = \frac{2}{2\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 0$, donc la suite (v_n) est décroissante. Enfin, $u_n - v_n = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$, qui a certainement une limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Les deux suites sont donc bien adjacentes, et ont une limite commune l. De plus, on aura, quel que soit l'entier naturel n, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$ (les inégalités sont même strictes). On calcule $u_1 = 1 - 2\sqrt{2}$ et $v_1 = -1$ (il y a une coquille dans l'énoncé) pou obtenir l'encadrement demandé. Comme on sait que $|u_n - l| \leqslant v_n - u_n$, il suffit d'avoir $v_n - u_n = \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \leqslant 10^{-2}$, soit $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} > 200$. Cela sera vrai a fortiori si $2\sqrt{n} > 200$, soit $\sqrt{n} > 100$ ou encore $n > 10\ 000$. Eh oui, la convergence des deux suites est très lente !