AP : Séance n° 6

PTSI B Lycée Eiffel

6 décembre 2019

Quelques exercices sur les complexes.

1. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $\left|\dfrac{z-1}{z+i}\right| = 2$.
2. Idem pour la condition $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+i}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$.
3. Idem pour la condition $|z^2| = |1-z| = |\overline{z}|$.
4. Résoudre les équations suivantes :
   (a) $z^4 - (3+8i)z^2 - 16 + 12i = 0$.
   (b) $z^3 - i = 6(z+i)$.
   (c) $z^4 = z + \overline{z}$.
5. Soient A et B les points d'affixes respectives i et 1. En notant r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$, et r' la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, donner l'expression complète de l'isométrie $r \circ r'$, et reconnaitre cette dernière. Même question avec $r' \circ r$.
6. Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c, montrer que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$ ou $A + jc + j^2b = 0$ (où on a noté $e^{i\frac{2\pi}{3}} = j$).
7. Soit $ABCDEFG$ un heptagone régulier, montrer que $\dfrac{1}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$.

Et quelques-uns sur les suites.

1. On définit une suite (u_n) par les conditions $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$. Calculer u_n en fonction de n.
2. On définit une suite (u_n) par les conditions $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \sqrt{\dfrac{u_{n+1}^9}{u_n^4}}$. Calculer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la nature de la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ (on ne demande pas la valeur de la limite éventuelle ; on pourra par contre calculer les premiers termes de la suite pour voir un peu ce qui se passe).
4. On définit une suite (u_n) par $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Ent}(kx)$ (où x est un réel non nul fixé). Prouver la convergence de la suite (u_n) et calculer sa limite.
5. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En notant l leur limite commune, montrer que $1 - 2\sqrt{2} \leqslant l \leqslant 1$, puis déterminer une valeur de n pour laquelle u_n est une valeur approchée de n à 10^{-2} près (sans chercher à calculer u_n !).