AP : Séance n^o 5 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

22 novembre 2019

Du classique pour s'échauffer.

1. Faisons donc comme on nous le conseille, ou plutôt écrivons le changement de fonction inconnue dans l'autre sens : $y(t) = e^{2t}z(t)$, ce qui permet de dériver deux fois avant de remplacer dans l'équation : $y'(t) = 2e^{2t}z(t) + e^{2t}z'(t)$, puis $y''(t) = 4e^{2t}z(t) + 4e^{2t}z'(t) + e^{2t}z''(t)$. Quitte à tout simplifier par e^{2t} (qui ne s'annule évidemment jamais), l'équation de départ est donc équivalente à $4z+4z'+z''-8z-4z'+4z = \frac{1}{t^2}$, soit tout simplement $z'' = \frac{1}{t^2}$. Intuile de recourir à des méthodes classiques de résolution d'équations différentielles ici, il suffit de primitiver deux fois (en gardant par contre toutes les primitives à chaque étape) : $z'(t) = -\frac{1}{t} + K$, puis $z(t) = -\ln(t) + Kt + L$, avec $(K, L) \in \mathbb{R}^2$ (on a supposé que la résolution s'effectuait sur l'intervalle $]0, +\infty[$). Autrement dit, on aura $y(t) = e^{2t}(Kt + L - \ln(t))$.
2. Commençons par résoudre l'équation homogène associée en appliquant gentiment les formules vues en cours. On pose donc l'équation caractéristique $r^2-2r+2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$, et admet donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$, et $r_2 = 1 - i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $y_h : t \mapsto (A\cos(t) + B\sin(t))e^t$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
   Pour trouver une solution particulière de l'équation, il va falloir modifier le second membre de l'équation en exploitant les formules de duplication du cosinus : $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$, donc $\cos(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$. On va ensuite procéder par superposition : on chercher d'abord une solution particulière à l'équation $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}$. Même pas besoin de calculs ici, on sait qu'une fonction constante sera solution, et la fonction $y_{p_1} : t \mapsto \frac{1}{4}$ convient manifestement. Reste à trouver une deuxième solution particulière y_{p_2} de l'équation $y''-2y'+2y = \frac{1}{2}\cos(2t)$. Deux méthodes possibles pour cela :
   - comme dans le cours, on chercher une solution complexe y_c à l'équation $y'' - 2y' + 2y = \frac{1}{2}e^{2it}$ sous la forme $y_c(t) = Ke^{2it}$. On calcule très rapidement $y_c'(t) = 2iKe^{2it}$ puis $y_c''(t) = -4Ke^{2it}$, et y_c est donc solution de notre équation complexe si $(-4K - 4iK + 2K)e^{2it} = \frac{1}{2}e^{2it}$, soit $K = \frac{1}{-4-8i} = \frac{8i-4}{4^2+8^2} = -\frac{1}{20} + \frac{1}{10}i$. Autrement dit, $y_c(t) = \left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{10}i\right)e^{2it}$. Or, la partie réelle de y_c vérifiera l'équation $y''-2y'+2y = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(e^{2it}) = \frac{1}{2}\cos(2t)$, ce qui permet donc de prendre $y_{p2(t)} = \operatorname{Re}(y_c(t)) = -\frac{1}{20}\cos(2t) - \frac{1}{10}\sin(2t)$.
   - comme pour une équation du premier ordre, on cherche directement y_{p_2} sous la forme $y_{p_2}(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$, ce qui donne $y_{p_2}'(t) = -2a\sin(2t) + 2b\cos(2t)$, puis $y_{p_2}''(t) = -4a\cos(2t) - 4b\sin(2t)$. On remplace tout cela dans l'équation pour obtenir (après regroupement) : $(-2a-4b)\cos(2t)+(4a-2b)\sin(2t) = \frac{1}{2}\cos(2t)$. Cette égalité sera manifestement

vérifiée si on impose les deux conditions $-2a-4b=\frac{1}{2}$ et $4a-2b=0$. On en déduit $b=2a$, puis $-10a=\frac{1}{2}$, donc $a=-\frac{1}{20}$ et $b=-\frac{1}{10}$. On retrouve la même solution y_{p_2} que par l'autre méthode.

On conclut bien entendu en donnant les solutions de l'équation initiale : $y(t)=(A\cos(t)+B\sin(t))e^t-\frac{1}{20}\cos(2t)-\frac{1}{10}\sin(2t)+\frac{1}{4}$.

Une équation du deuxième ordre à résoudre en deux temps.

1. On normalise pour obtenir $z'-\frac{1}{x}z=x^2$. La fonction $x\mapsto -\frac{1}{x}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et y admet pour primitive la fonction $x\mapsto -\ln(x)$, donc les solutions de l'équation homogène associée à notre équation sont de la forme $z_h : x\mapsto Ke^{\ln(x)}=Kx$, avec $K\in\mathbb{R}$. Reste à déterminer une solution particulière z_p de l'équation complète, qu'on va chercher (par variation de la constante) sous la forme $z_p(x)=xK(x)$. On aura alors $z_p'(x)=K(x)+xK'(x)$, et z_p est donc solution de l'équation complètes si $K(x)+xK'(x)-K(x)=x^2$, soit $K'(x)=x$. On peut donc choisir $K(x)=\frac{x^2}{2}$, ce qui revient à prendre $z_p(x)=\frac{x^3}{2}$. Toutes les solutions de l'équation complète sont donc les fonctions $z : x\mapsto \frac{x^3}{2}+Kx$, avec $K\in\mathbb{R}$.
2. Si on pose $z=xy'-y$, on a donc $z'=y'+xy''-y'=xy''$, et $xz'-z=x^2y''-xy'-y$. Mais si y est supposée solution de (E), le membre de droite de cette égalité est égal à x^3, donc z vérifie bien l'équation $xz'-z=x^3$ qu'on vient de résoudre.
3. D'après les deux questions précédentes, toute fonction y solution de (E) vérifie $xy'-y=\frac{x^3}{2}+Kx$, ou encore $y'-\frac{1}{x}y=\frac{x^2}{2}+K$. Il ne reste plus qu'à résoudre cette deuxième équation différentielle du premier ordre. L'équation homogène associée étant exactement la même qu'à la question 1, ses solutions sont les fonctions $y_h : x\mapsto Lx$, avec $L\in\mathbb{R}$. On va chercher une solution particulière y_p de l'équation complète sous la forme $y_p(x)=xL(x)$, et un calcul identique à celui effectué plus haut donne $xL'(x)=\frac{x^2}{2}+K$, soit $L'(x)=\frac{x}{2}+\frac{K}{x}$. On peut choisir $L(x)=\frac{x^2}{4}+K\ln(x)$, soit $y_p(x)=\frac{x^3}{4}+Kx\ln(x)$. Les solutions de l'équation (E) sont donc toutes les fonctions de la forme $y : x\mapsto \frac{x^3}{4}+Kx\ln(x)+Lx$, avec $(K,L)\in\mathbb{R}^2$.
4. On peut appliquer exactement la même méthode sur l'intervalle $]-\infty,0[$. Les solutions des équations homogènes des deux équations du premier ordre resteront les mêmes (le fait de remplacer dans l'exponentielle le $\ln(x)$ par un $\ln(-x)$ ne fera que changer le signe de la constante), et seule la solution particulière obtenue pour la deuxième équation devra être légèrement modifiée, en remplaçant le $\ln(x)$ par un $\ln(-x)$. On obtiendra donc des solutions de la forme $y : x\mapsto \frac{x^3}{4}+Ax\ln(-x)+Bx$, avec $(A,B)\in\mathbb{R}^2$.
Pour espérer recoller ces différentes solutions, elle doivent déjà avoir une limite finie en 0. C'est en fait toujours le cas : comme $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x)=\lim_{x\to 0^-} x\ln(-x)=0$ (croissance comparée), on aura toujours $\lim_{x\to 0} y(x)=0$, à gauche comme à droite, et quelles que soient les valeurs des constantes A, B, K et L. Ce n'est pas suffisant, il faut aussi avoir des limites finies (et égales) pour les dérivées. Calulons donc : $\forall x>0$, $y'(x)=\frac{3x^2}{4}+K\ln(x)+K+L$. Si $K\neq 0$, cette dérivée aura une limite infinie en 0, il faut donc imposer $K=0$ pour espérer recoller. On a alors $\lim_{x\to 0^+} y'(x)=L$. De même sur $]-\infty,0[$, on devra imposer $A=0$ et on trouvera alors $\lim_{x\to 0^-} y'(x)=B$ (calcul identique). Pour obtenir une fonction dérivable en 0, on impose donc

$L = B$, et on obtient alors simplement que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \dfrac{x^3}{4} + Lx$, avec $L \in \mathbb{R}$. Toutes ces fonctions sont solutions de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5. Posons donc $y(x) = z(t) = z(\ln(x))$ et calculons $y'(x) = \dfrac{1}{x}z'(\ln(x))$, puis $y''(x) = -\dfrac{1}{x^2}z'(\ln(x)) + \dfrac{1}{x^2}z''(\ln(x))$. En remplaçant dans l'équation initiale, (E) est donc équivalente à $-z'(\ln(x)) + z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) + z(\ln(x)) = x^3$, donc à $z''(t) - 2z'(t) + z(t) = e^{3t}$. L'équation homogène associée à cette dernière équation a pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$, qui admet elle-même pour racine double $z = 1$. Les solutions de cette équation homogène sont donc les fonctions $z : t \mapsto (A + Bt)e^t$, avec $(A, B) \in \mathbb{R}$. En cherchant une solution particulière z_p de l'équation complète sous la forme $z_p(t) = Ke^{3t}$ (avec $K \in \mathbb{R}$), on calcule $z_p'(t) = 3Ke^{3t}$ et $z_p''(t) = 9Ke^{3t}$, et z_p est donc solution si $9Ke3t - 6Ke^{3t} + Ke^{3t} = e^{3t}$, soit $4K = 1$ (on peut bien sûr simplifier par e^{3t} qui ne s'annule jamais). Autrement dit, on peut prendre $z_p(t) = \dfrac{1}{4}e^{3t}$, et les solutions de notre équation équivalente sont donc les fonctions $z : t \mapsto \dfrac{1}{4}e^{3t} + (A + Bt)e^t$. Il ne reste plus qu'à remonter le changement de variable pour trouver $y(x) = z(\ln(x)) = \dfrac{1}{4}e^{3\ln(x)} + (A + B\ln(x))e^{\ln(x)}$, soit $y(x) = \dfrac{x^3}{4} + Ax + Bx\ln(x)$, on retrouve bien sûr les mêmes solutions qu'avec l'autre méthode de résolution.

Un problème de calcul d'intégrale.

1. (a) Jusque-là c'est facile : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

   (b) C'est déjà plus compliqué : on doit bien sûr avoir $x \neq 0$ pour que les bornes de l'intégrale définissant g aient un sens, mais il faut en plus de cela que la fonction f soit continue et donc en particulier définie entre ces deux bornes. Autrement dit, il ne faut surtout pas que -1 soit situé entre $\dfrac{1}{x}$ et x. Or, cela se produira systématiquement lorsque $x < 0$: si $x < -1$, alors $\dfrac{1}{x} > -1$ et si $x \in]-1, 0[$ alors $\dfrac{1}{x} < -1$. Lorsque $x > 0$, par contre, on ne risque pas d'avoir de problème puisque les deux bornes de l'intégrale sont alors positives. Bref, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^{+*}$.

   (c) Échanger les bornes d'une intégrale revient à changer son signe, donc $g\left(\dfrac{1}{x}\right) = -g(x)$.

2. (a) Il n'y a rien à expliquer, c'est la définition de l'intégrale ! Quelle question débile...

   (b) De l'expression précédente, on déduit $g'(x) = f(x) + \dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (attention à bien dériver la composée). On peut calculer : $g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} + \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{(\frac{1}{x}+1)^2(\frac{1}{x^2}+1)} = \dfrac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} + \dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{x^2 \times x^2}{(1+x)^2(1+x^2)} = \dfrac{1+x^2}{(x+1)^2(x^2+1)} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$. Mais on connait les primitives de ce qu'on vient d'obtenir et on en déduit l'existence d'une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0$, $g(x) = -\dfrac{1}{x+1}$. Il suffit de déterminer une valeur de g pour calculer k. On a $g(1) = 0$ (les deux bornes de l'intégrale étant alors identiques), donc $0 = -\dfrac{1}{2} + k$ et $k = \dfrac{1}{2}$. On peut conclure : $g(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x+1}$.

3. (a) Si on pose $u = \dfrac{1}{t}$, ou $t = \dfrac{1}{u}$, on a $dt = -\dfrac{1}{u^2}\,du$, et les bornes de l'intégrale sont échangées. Quitte à annuler ces deux changements de signe, $g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \dfrac{1}{(\frac{1}{u}+1)^2(\frac{1}{u^2}+1)} \times \dfrac{1}{u^2}\,du =$

$\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{u^2}{(u+1)^2(u^2+1)}\,du$ (le calcul de simplification est rigoureusement identique à celui de la question précédente).

(b) On peut bien sûr remplacer la variable muette u par un t dans le calcul précédent et ajouter cette nouvelle expression à l'expression initiale : $2g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}\,dt + \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t^2}{(t+1)^2(t^2+1)}\,dt = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1+t^2}{(t+1)^2(t^2+1)}\,dt = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t+1}\right]_{\frac{1}{x}}^{x} = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = -\frac{1}{x+1} + \frac{x}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$. On en déduit que $g(x) = \dfrac{x-1}{2(x+1)}$ (c'est bien la même expression que plus haut, quitte à tout remettre au même dénominateur).

4. (a) Pour une fois, soyons bourrins, et effectuons une brutale mise au même dénominateur : $\dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{(t+1)^2} + \dfrac{ct+d}{t^2+1} = \dfrac{a(t+1)(t^2+1) + b(t^2+1) + (ct+d)(t+1)^2}{(t+1)^2(t^2+1)}$. Contentons-nous de développer le numérateur : $a(t^3+t^2+t+1)+b(t^2+1)+c(t^3+2t^2+t)+d(t^2+2t+1) = (a+c)t^3 + (a+b+2c+d)t^2 + (a+c+2d)t + a + b + d$. Par identification, on obtient les conditions $a+c=0$, $a+b+2c+d=0$, $a+c+2d=0$ et $a+b+d=1$. On en déduit que $c=-a$, donc $2d=0$ (troisième condition) et $d=0$. On reporte alors dans la deuxième équation : $a+b-2a=0$, soit $a=b$. Reste alors à exploiter la dernière condition, qui devient $a+a=1$, soit $a=b=\dfrac{1}{2}$ et $c=-\dfrac{1}{2}$. Autrement dit, $f(t) = \dfrac{1}{2(t+1)} + \dfrac{1}{2(t+1)^2} - \dfrac{t}{2(t^2+1)}$.

(b) On déduit de la question précédente une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$: $F(t) = \dfrac{1}{2}\ln(t+1) - \dfrac{1}{2(t+1)} - \dfrac{1}{4}\ln(t^2+1)$. On peut alors calculer directement $g(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right) + \dfrac{1}{2(\frac{1}{x}+1)} + \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{x^2}+1\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x+1) - \dfrac{1}{2(x+1)} - \dfrac{1}{4}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{2}\ln(x+1) + \dfrac{1}{2}\ln(x) + \dfrac{x}{2(x+1)} + \dfrac{1}{4}\ln(x^2+1) - \dfrac{1}{4}\ln(x^2) = \dfrac{x-1}{2(x+1)}$ (tous les ln s'annulent puisque $\ln(x^2) = 2\ln(x)$.

5. Notons I l'intégrale à calculer et commençons par écrire que $I = \displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\theta)} + \frac{2\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}\,d\theta$.

On peut alors avoir la brillante idée de poser $t = \tan(\theta)$, ou encore $\theta = \arctan(t)$, donc $d\theta = \dfrac{1}{1+t^2}\,dt$. On trouve alors $I = \displaystyle\int_{\tan(\alpha)}^{\tan(\frac{\pi}{2}-\alpha)} \frac{1}{1+t^2+2t} \times \frac{1}{1+t^2}\,dt$ (en utilisant la relation $\dfrac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \tan^2(\theta)$. Il ne reste plus qu'à remarquer que $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$ (c'est dans le cours de trigo !) pour en déduire que $I = g(\tan(\alpha))$. En utilisant les résultats des questions précédentes, on peut conclure que $I = \dfrac{\tan(\alpha)-1}{2(1+\tan(\alpha))}$.