Du classique pour s'échauffer.

Résoudre les équations suivantes :

1. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2t}}{t^2}$ (on posera $z(t) = y(t)e^{-2t}$).
2. $y'' - 2y' + 2y = \cos^2(t)$.

Une équation du deuxième ordre à résoudre en deux temps.

On considère dans cet exercice l'équation différentielle (E) : $x^2y'' - xy' + y = x^3$.

1. Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation du premier ordre $xz' - z = x^3$.
2. Soit y une fonction solution de l'équation (E). En posant $z = xy' - y$, montrer que z est solution de l'équation résolue à la question précédente.
3. En déduire les solutions de l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.
4. Que se passe-t-il si on souhaite résoudre sur $]-\infty, 0[$? Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
5. Résoudre à nouveau l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$, mais cette fois en effectuant le changement de variable $t = \ln(x)$.

Un problème de calcul d'intégrale.

On définit dans cet exercice une fonction g par la formule $g(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}\,dt$, et on va donner plusieurs méthodes permettant de calculer explicitement la valeur de $g(x)$. Les questions 2, 3 et 4 de l'exercice sont **indépendantes**, il est donc hors de question d'utiliser le résultat d'une de ces questions (ou même d'une sous-question) pour traiter les autres.

1. On pose $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
   (b) En déduire celui de la fonction g.
   (c) Comparer les valeurs de $g(x)$ et de $g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand cela a un sens.
2. Première méthode : on note F une primitive quelconque de f valable sur le domaine de définition de g.
   (a) Expliquer pourquoi $g(x) = F(x) - F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (b) Exprimer $g'(x)$ à l'aide de f, puis explicitement. En déduire une expression de $g(x)$.
3. Deuxième méthode : exploitation astucieuse d'un changement de variable.
   (a) En posant $u = \dfrac{1}{t}$ dans l'intégrale définissant $g(x)$, donner une nouvelle expression de $g(x)$.
   (b) Faire la somme des deux expressions intégrales de $g(x)$, et retrouver l'expression explicite de $g(x)$.
4. Troisième méthode : bourrinage.
   (a) Décomposer en éléments simples $f(t)$ sous la forme $f(t) = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{(t+1)^2} + \dfrac{ct+d}{t^2+1}$.
   (b) En déduire l'expression de $g(x)$ par une intégration directe.
5. Complément : soit $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Calculer $\displaystyle\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2(\theta)}{1+\sin(2\theta)}\,d\theta$ (il y a bien sûr un lien avec le reste de l'exercice).