AP : Séance n$^{\text{o}}$ 4

PTSI B Lycée Eiffel

8 novembre 2019

Exercice 1 : fourre-tout sur les intégrales.

1. Déterminer une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^4} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2 - 5x + 6}\, dx$.
3. Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{8}} \frac{1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}}{x}\, dx$ en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$.
4. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}$. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}. En déduire la valeur de I_4.
5. On pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\arctan(t)}{t}\, dt$. Déterminer le domaine de définition de F, puis calculer sa dérivée F' et en déduire une expression plus simple de F.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1+x^2)y' + xy = \sqrt{1+x^2}$.
2. $(1-x^2)y' - xy = 1$ (sur l'intervalle $]-1,1[$).
3. $\ln(x)y' + \dfrac{1}{x}y = 1$ (sur chacun des intervalles où la résolution a un sens ; on cherchera ensuite à recoller les solutions obtenues).

Exercice 3

On considère dans tout cet exercice l'équation différentielle $(E) : xy' - y + x = 0$.

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto -x\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$, en essayant de la prolonger par continuité en 0 et de déterminer si la fonction ainsi prolongée est dérivable en 0. On tracera naturellement une allure soignée de la courbe pour conclure cette étude.
2. Résoudre l'équation (E) successivement sur les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Existe-t-il des solutions à l'équation définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ?
3. On se concentre désormais sur les solutions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soit $x_0 > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, déterminer l'expression de l'unique solution de (E) vérifiant $f(x_0) = y_0$. Donner une équation de sa tangente au point de la courbe d'abscisse x_0, et prouver que toutes les tangentes obtenues sont concourantes lorsque y_0 parcourt $\mathbb{R}$ (x_0 restant fixé).
4. Vérifier que les courbes des solutions de (E) admettent toutes un maximum sur $\mathbb{R}^{+*}$, et déterminer le lieu des points correspondants.
5. Tracer dans un même repère l'allure de quelques solutions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$, en faisant apparaitre distinctement leur tangentes au point d'abscisse $x_0 = 1$, ainsi que le lieu des maxima déterminé à la question précédente.