AP n° 3 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

11 octobre 2019

Quelques exercices de trigonométrie

1. Première méthode (en mode gros bourrin) : on utilise les formules de duplication, triplication et quadriplication des sinus. Pour obtenir cette dernière qui n'est pas dans le cours, on écrit simplement $\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$ (formule de duplication), soit $\sin(4x) = 4\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x) - 1)$ (j'ai préféré garder des cosinus pour la dernière duplication car ce sera bizarrement plus efficace que des sinus). On peut maintenant développer brutalement le membre de gauche de notre équation : $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) + \sin(4x) = \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) + 3\sin(x) - 4\sin^3(x) + 4\sin(x)\cos(x)(2\cos^2(x) - 1) = \sin(x)(1 + 2\cos(x) + 3 - 4\sin^2(x) + 4\cos(x)(2\cos^2(x) - 1)) = \sin(x)(1 + 2\cos(x) + 3 - 4 + 4\cos^2(x) + 8\cos^3(x) - 4\cos(x)) = 2\sin(x)\cos(x)(4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 1)$. Notre équation est donc vérifiée si $\sin(x) = 0$, soit $x \equiv 0[\pi]$; $\cos(x) = 0$, soit $x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ (on peut regrouper ces deux premiers cas sous la forme $x \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$) ; soit enfin $4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 1 = 0$. Pour ce dernier cas, on pose $X = \cos(x)$ et on résout l'équation du second degré $4X^2 + 2X - 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 16 = 20$, et admet deux racines réelles $X_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, et $X_2 = \frac{-\sqrt{5} - 1}{4}$. Ces deux valeurs étant comprises entre -1 et 1, elles correspondent certainement à des cosinus d'angles, mais ces derniers ont le mauvais goût de ne pas être dans notre ligne d'angles à connaitre. En fait, les plus savant remarqueront qu'on obtient $x \equiv \pm\frac{2\pi}{5}[2\pi]$ ou $x \equiv \pm\frac{4\pi}{5}[2\pi]$.
   Deuxième méthode (nettement plus savante) : exploitation de transformations somme-produit. On utilise deux fois la formule $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$, une fois sur les deux sinus extrêmes du membre de gauche de l'équation, et une autre sur les deux sinus du milieu. Ledit membre de gauche est donc égal à $2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. L'équation est donc vérifiée si $\sin\left(\frac{5x}{2}\right) = 0$, soit $\frac{5x}{2} \equiv 0[\pi]$ et donc $x \equiv 0\left[\frac{2\pi}{5}\right]$; ou si $\cos\left(\frac{3x}{2}\right) = -\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right)$, ce qui se produit si $\frac{3x}{2} \equiv \pi - \frac{x}{2}[2\pi]$ ou si $\frac{3x}{2} \equiv \frac{x}{2} - \pi[2\pi]$. On retrouve pour ces deux derniers cas les conditions $x \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ et $x \equiv -\pi[2\pi]$. On constate facilement que tous les cas obtenus donnent bien les mêmes solutions que celles obtenues par la première méthode (encore heureux !).
2. La méthode la plus classique et évidente consiste à calculer une dérivée. Pour celà, posons donc $f(x) = \arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$. Remarquons déjà que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, car la racine carrée à l'intérieur de la deuxième arctangente est bien sûr toujours définie ($1 + x^2 > 0$). Posons en passant $u(x) = \sqrt{1+x^2} - x$, et calculons pour commencer $u'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1 =$

$\dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$. On en déduit alors que $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{2u'(x)}{1+u^2(x)} = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{2(x-\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \times \dfrac{1}{1+(\sqrt{1+x^2}-x)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{2(x-\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} \times \dfrac{1}{1+1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+x^2} = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2-x\sqrt{1+x^2})} = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2}-x)} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$. Ouf, la fonction f est constante comme prévu. Comme de plus $f(0) = 0 + 2\arctan(1) = 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, on en déduit la formule demandée.

La deuxième méthode, à coups de trigonométrie, est en fait très difficile à appliquer. Le plus naturel est de commencer par poser $x = \tan(\theta)$, en choisissant tant qu'à faire $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (ce qu'on peut faire quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il suffit en fait de prendre $\theta = \arctan(x)$. On aura alors bien entendu $\arctan(x) = \theta$. Reste à gérer l'autre terme, commençons par écrire que $\sqrt{1+x^2} - x = \sqrt{1+\tan^2(\theta)} - \tan(\theta) = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2(\theta)}} - \tan(\theta)$. Or, on a nécessairement $\cos(\theta) \geqslant 0$ sur l'intervalle choisi pour θ, donc on peut simplifier en $\dfrac{1}{\cos(\theta)} - \tan(\theta) = \dfrac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. On est donc maintenant censés calculer l'arctangente de cette expression et le multiplier par 2 pour obtenir $\dfrac{\pi}{2} - \theta$, ce qui suppose que cette arctangente vaut donc $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}$. Trichons un peu en faisant le calcul dans l'autre sens : $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{1-\tan(\frac{\theta}{2})}{1+\tan(\frac{\theta}{2})}$ (formule d'addition des tangentes), soit encore, en multipliant numérateur et dénominateur par $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, $\dfrac{\cos(\frac{\theta}{2}) - \sin(\frac{\theta}{2})}{\cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2})} = \dfrac{\cos^2(\frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\theta}{2})}{(\cos(\frac{\theta}{2}) + \sin(\frac{\theta}{2}))^2} = \dfrac{\cos(\theta)}{1+2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})} = \dfrac{\cos(\theta)}{1+\sin(\theta)}$ (on a utilisé les formules de duplication du cosinus et du sinus pour ces dernières étapes). On peut encore modifier, notre expression est égale à $\dfrac{\cos(\theta)(1-\sin(\theta)}{1-\sin^2(\theta)} = \dfrac{\cos(\theta)(1-\sin(\theta))}{\cos^2(\theta)} = \dfrac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. Ouf, la tangente prend la bonne valeur ! Il ne reste plus qu'à signaler que $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\theta}{2} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ pour identifier notre deuxième arctangente et conclure le calcul.

3. Pour simplifier les calculs, notons $a = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$. La formule de duplication des tangentes, appliquée à l'angle $\dfrac{\theta}{2}$, donne $\tan(\theta) = \dfrac{2a}{1-a^2}$, première des trois formules demandées. On peut alors écrire $1+\tan^2(\theta) = 1 + \dfrac{4a^2}{(1-a^2)^2} = \dfrac{(1-a^2)^2+4a^2}{(1-a^2)^2} = \dfrac{1+a^4+2a^2}{(1-a^2)^2} = \dfrac{(1+a^2)^2}{(1-a^2)^2}$. Comme on sait que $\dfrac{1}{\cos^2(\theta)} = 1+\tan^2(\theta)$, on en déduit que $\cos(\theta) = \left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2$. Reste à déterminer le signe de $\cos(\theta)$ avant de pouvoir prendre la racine carrée. Si $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ (modulo 2π), alors le cosinus est positif. Mais dans ce cas, $\dfrac{\theta}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$, et donc $a \in]-1, 1[$. On a alors $\dfrac{1-a^2}{1+a^2} > 0$, on peut donc prendre la racine carrée sans problème. On a donc dans ce cas $\cos(\theta) = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$. En fait cette formule est toujours vraie, puisque dans l'autre cas possible le cosinus est négatif, mais le quotient $\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$ aussi, et ils sont donc aussi égaux. Dernier calcul facile : $\sin(\theta) = \tan(\theta) \times \cos(\theta) = \dfrac{2a}{1-a^2} \times \dfrac{1-a^2}{1+a^2} = \dfrac{2a}{1+a^2}$.

4. (a) Comme on sait que $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ quel que soit la valeur de x, on a toujours $0 \leqslant$

$\dfrac{1+\sin(x)}{2} \leqslant 1$. L'ajout de la racine carrée ne va pas modifier cet encadrement, et l'arccosinus qui couronne le tout est donc toujours défini. Autrement dit, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. La fonction sin étant impaire, f n'a pas de parité notable. Elle est par contre 2π-périodique. On peut donc restreindre l'étude de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

(b) Sur l'intervalle proposé, la fonction sin est strictement croissante, donc ce qui se trouve dans la racine carrée aussi. On compose ensuite par une fonction strictement croissante (la racine carrée), puis par une fonction strictement décroissante (la fonction arccos), on aura globalement une fonction strictement décroissante, donc bijective (elle est bien sûr continue). Il reste alors à calculer $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \arccos(\sqrt{0}) = \arccos(0) = \dfrac{\pi}{2}$, et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \arccos(\sqrt{1}) = \arccos(1) = 0$. La fonction f est donc bijective de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Pour obtenir la réciproque g, on part de $f(x) = y$, soit $\arccos\left(\sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}\right) = y$, pour obtenir $\sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}} = \cos(y)$, puis $\dfrac{1+\sin(x)}{2} = \cos^2(y)$ (ce ne sont a priori que des implications et pas des équivalences mais on peut en l'occurrence vérifier aisément que les signes coïncident sur l'intervalle choisi). Enfin, on trouve $\sin(x) = 2\cos^2(y) - 1$. Le membre de droite étant toujours compris entre -1 et 1 (il vaut mieux, sinon la fonction f ne pourrait pas être bijective), et l'intervalle de travail étant $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on peut en déduire que $x = \arcsin(2\cos^2(y) - 1)$, soit $g(y) = \arcsin(\cos(2y))$ en reconnaissant une formule de duplication. On peut encore simplifier mais comme on va le faire à la question suivante, pas besoin de se fatiguer ici.

(c) La fonction f n'est pas dérivable en x lorsque ce qui se trouve sous la racine carrée est égal à 0 (donc $\sin(x) = -1$), ou lorsque ce qui se trouve dans l'arccos est égal à 1 (ça ne peut pas être égal à -1), donc $\sin(x) = 1$. Globalement, les valeurs posant problème sont les x tels que $x \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$. Le reste du temps, en notant $u(x) = \sqrt{\dfrac{1+\sin(x)}{2}}$, on calcule $u'(x) = \dfrac{\frac{\cos(x)}{2}}{2\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}} = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{2(1+\sin(x))}}$. Ensuite, on obtient $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}} = \dfrac{-\cos(x)}{2\sqrt{2(1+\sin(x))}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1+\sin(x)}{2}}} = \dfrac{-\cos(x)}{2\sqrt{1+\sin(x)}} \times \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin(x)}} = -\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{1-\sin^2(x)}} = -\dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\cos^2(x)}} = \pm\dfrac{1}{2}$ selon le signe de $\cos(x)$. Sur lintervalle I, le cosinus étant positif, on a $f'(x) = -\dfrac{1}{2}$, donc $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + k$. Comme $f(0) = \arccos\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, on a $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}$ sur cet intervalle.

(d) Si $y = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}$, alors $x = \dfrac{\pi}{2} - 2y$, donc $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - 2x$.

Une étude de fonction.

1. Il n'y a pas vraiment d'autre moyen que d'utiliser la méthode horriblement astucieuse suivante : on divise tout par deux pour obtenir $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos(x) - \dfrac{1}{2}\sin(x) > \dfrac{1}{2}$, soit $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) > \dfrac{1}{2}$ (on reconnait en effet dans le membre de gauche une formule d'addition de cosinus). Avec les notations abusives du cours, on en déduit que $x + \dfrac{\pi}{6} \in \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$ $[2\pi]$, soit $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}\right]$ $[2\pi]$. Si on veut le noter plus correctement, $S = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left[2k\pi - \dfrac{\pi}{2}, 2k\pi + \dfrac{\pi}{6}\right]$..

2. Le dénominateur ne pouvant jamais s'annuler (puisque $\sqrt{3} > 1$), la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
3. La fonction f n'est ni paire ni impaire, mais elle est certainement 2π-périodique, on peut l'étudier par exemple sur $[-\pi, \pi]$.
4. On calcule donc $f'(x) = \dfrac{\sqrt{3}\cos(x) - \cos^2(x) - \sin(x) - \sin^2(x)}{(\sqrt{3} - \cos(x))^2} = \dfrac{\sqrt{3}\cos(x) - \sin(x) - 1}{(\sqrt{3} - \cos(x))^2}$ (contrairement à ce que laissait sous-entendre l'énoncé, il n'y a pas la moindre factorisation possible).
5. La première question prouve que, sur notre intervalle, f' est positive entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{6}$. On calcule donc $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, et $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. On peut aussi signaler en passant que $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$, ou encore $f(\pi) = f(-\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{3} + 1} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$. Concluons cette question avec le tableau de variations demandé :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	π
f	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

6. On a déjà dit que $f(0) = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$, de plus $f'(0) = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{(\sqrt{3} - 1)^2} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$, la tangente a donc pour équation $y = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}(x + 1)$ (elle coupera donc l'axe des abscisses en $x = -1$).
7. Voici une allure sur une période (et un peu plus) :