AP n° 1 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

6 septembre 2019

Calculs

1. Le plus simple est de commencer par décomposer le nombre sous la racine carrée en facteurs premiers : $2\ 592 = 2 \times 1\ 296 = 2^2 \times 648 = 2^3 \times 324 = 2^4 \times 162 = 2^5 \times 81 = 2^5 \times 3^4$. Ensuite, on simplifie $\sqrt{2^5 \times 3^4} = 3^2 \times 2^2 \times \sqrt{2} = 36\sqrt{2}$.
2. Plutôt que de développer très brutalement des carrés de sommes de trois termes (ce qu'on peut toujours faire en adaptant la formule suivante : $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$), on peut constater qu'on est en présence d'une différence de deux carrés et utiliser une identité remarquable bien connue : $(a+b-c)^2-(a-b+c)^2 = (a+b-c+a-b+c)(a+b-c-a+b-c) = 2a(2b-2c) = 4ab-4ac$.
3. $\sqrt{\dfrac{17}{18}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}}+\dfrac{2}{3} = \sqrt{\dfrac{17+6+9}{18}}+\dfrac{2}{3} = \sqrt{\dfrac{32}{18}}+\dfrac{2}{3} = \sqrt{\dfrac{16}{9}}+\dfrac{2}{3} = \frac{4}{3}+\dfrac{2}{3} = 2$.
4. On factorise simplement tout ce qu'on peut avant de simplifier : $\dfrac{x^3+x^5}{x^5+x^7} = \dfrac{x^3(1+x^2)}{x^5(1+x^2)} = \dfrac{1}{x^2}$.
5. Encore une fois, tout décomposer en facteurs premiers avant de simplifier évite d'oublier des choses en cours de route :
$\dfrac{25 \times 12^2 \times 10^3}{24 \times 8^2 \times 12^3} = \dfrac{5^2 \times (2^2 \times 3)^2 \times (2 \times 5)^3}{2^3 \times 3 \times (2^3)^2 \times (2^2 \times 3)^3} = \dfrac{5^2 \times 2^4 \times 3^2 \times 2^3 \times 5^3}{2^3 \times 3 \times 2^6 \times 2^6 \times 3^3} = \dfrac{5^5}{2^8 \times 3^2}$.
6. Ici, la connaissance des identités remarquables du troisième degré vues en cours aide :
$\dfrac{a^3-b^3}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b} = \dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)^2} - \dfrac{(a+b)^2}{a-b} = \dfrac{a^2+ab+b^2-(a+b)^2}{a-b} = -\dfrac{ab}{a-b}$.
7. On révise ici les propriétés classiques du logarithme népérien : $\ln(72^3) - \ln(36^2) = 3\ln(72) - 2\ln(36) = 3\ln(2^3 \times 3^2) - 2\ln(2^2 \times 3^2) = 3\ln(2^3) + 3\ln(3^2) - 2\ln(2^2) - 2\ln(3^2) = 9\ln(2) + 6\ln(3) - 4\ln(2) - 4\ln(3) = 5\ln(2) + 2\ln(3)$.
8. $\dfrac{(-ab^2)^3(ab^{-2})^2(c^2b)}{-a^2c^{-3}(ab^{-1}c^2)^3} = \dfrac{-a^3b^6a^2b^{-4}c^2b}{-a^2c^{-3}a^3b^{-3}c^6} = \dfrac{b^6}{c}$.
9. Sauf si on connait la formule du binôme de Newton, on n'a pas trop d'autre choix que d'élever deux fois de suite au carré : $(3x+2)^4 = ((3x+2)^2)^2 = (9x^2+12x+4)^2 = 81x^4 + 216x^3 + 216x^2 + 96x + 16$.

Équations et inéquations.

1. $8x^3 + 27 \leqslant 0 \Leftrightarrow x^3 \leqslant -\dfrac{27}{8}$. Il suffit alors de constater que $-\dfrac{27}{8} = \left(-\dfrac{3}{2}\right)^3$, et de penser que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ pour conclure que $x \leqslant -\dfrac{3}{2}$, soit $\mathcal{S} = \left]-\infty, -\dfrac{3}{2}\right]$.
2. C'est un cas classique de changement de variable : on pose $X = e^x$ (en se rappelant que $e^{2x} = (e^x)^2$) pour se ramener à l'équation du second degré $5X^2 - 4X - 1 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 16 + 20 = 36$, et qui admet donc pour racines $X_1 = \dfrac{4+6}{10} = 1$ et

$X_2 = \dfrac{4-6}{10} = -\dfrac{1}{5}$. On remonte alors aux valeurs de la variable initiale x : $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ et $e^x = -\dfrac{1}{5}$ est impossible puisqu'une exponentielle est toujours positive. L'équation n'admet donc qu'une seule solution : $\mathcal{S} = \{0\}$.

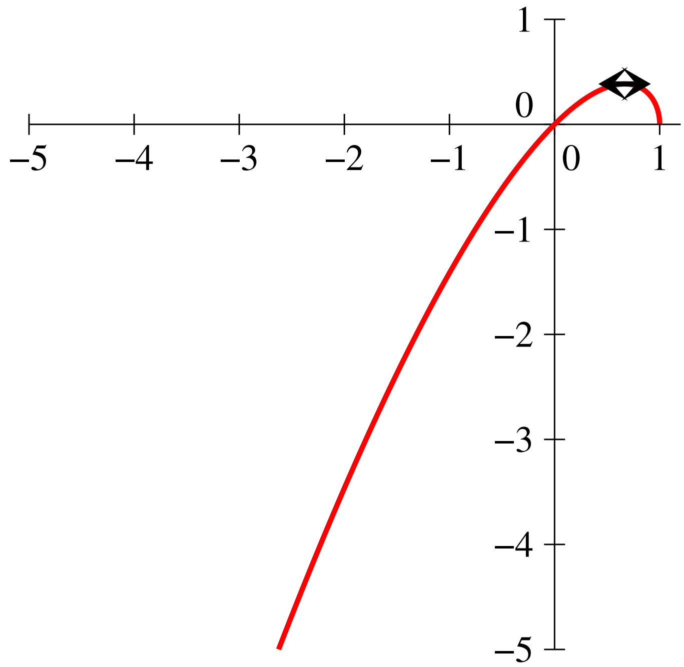
3. Encore un exemple où il vaut mieux se rendre compte que le membre de gauche est une différence de deux carrés et peut donc se factoriser via identité remarquable : $(x^2+2x-3)^2 - 25 = (x^2+2x-3+5)(x^2+2x-3-5) = (x^2+2x+2)(x^2+2x-8)$. Reste à étudier le signe de chacun de ces deux facteurs pour faire un tableau de signes : x^2+2x+2 a un discriminant $\Delta = 4-8 = -4$ strictement négatif, il est donc toujours positif. Le deuxième facteur x^2+2x-8 admet pour discriminant $\Delta = 4+32 = 36$ et a donc pour racines $x_1 = \dfrac{-2-6}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-2+6}{2} = 2$. Le trinôme est négatif entre ses racines, et comme le premier facteur était toujours positif, on en déduit immédiatement que $\mathcal{S} =]-4, 2[$.
4. Un classique : on passe la constante à gauche, on met au même dénominateur, et on fait un tableau de signe (si besoin) : $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x+3} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-2-(x^2-2x+3)}{x^2-2x+3} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-5}{x^2-2x+3}$. Le dénominateur a pour discriminant $\Delta = 4-12 < 0$, il est toujours positif. Notre quotient est donc du signe de $x-5$, et $\mathcal{S} =]-\infty, 5[$.
5. Le retour du changement de variable : on pose $X = \ln(x)$, et on se souvient que $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$, pour obtenir l'équation du second degré $2X^2+3X-9 = 0$, dont le discriminant vaut $\Delta = 9+72 = 81$, et qui admet pour racines $X_1 = \dfrac{-3-9}{4} = -3$ et $X_2 = \dfrac{-3+9}{4} = \dfrac{3}{2}$. Il ne reste plus qu'à remonter aux valeurs de x via la fonction exponentielle : $\ln(x) = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3} = \dfrac{1}{e^3}$ et $\ln(x) = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$. On conclut : $\mathcal{S} = \{e^{-3}, e^{\frac{3}{2}}\}$.

Études de fonctions.

1. La fonction f_1 est définie et dérivable sur $]-\infty, 1[$ (plus précisément elle est définie sur $]-\infty, 1]$, mais pas dérivable en 1), de dérivée $f_1'(x) = \sqrt{1-x} - \dfrac{x}{2\sqrt{1-x}}$ (le seul petit piège consiste à ne pas oublier le signe dans la deuxième partie, qui découle de la dérivée égale à -1 du $1-x$ situé sous la racine carrée). Si on souhaite étudier les variations de la fonction, la méthode sera toujours la même pour ce genre de dérivée, on met simplement au même dénominateur : $f_1'(x) = \dfrac{2(1-x)-x}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$. Cette dérivée est du signe de $2-3x$, la fonction f_1 admet donc en $\dfrac{2}{3}$ un maximum de valeur $f_1\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. On a par ailleurs $f_1(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$. Voici donc le tableau de variations de la fonction :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0

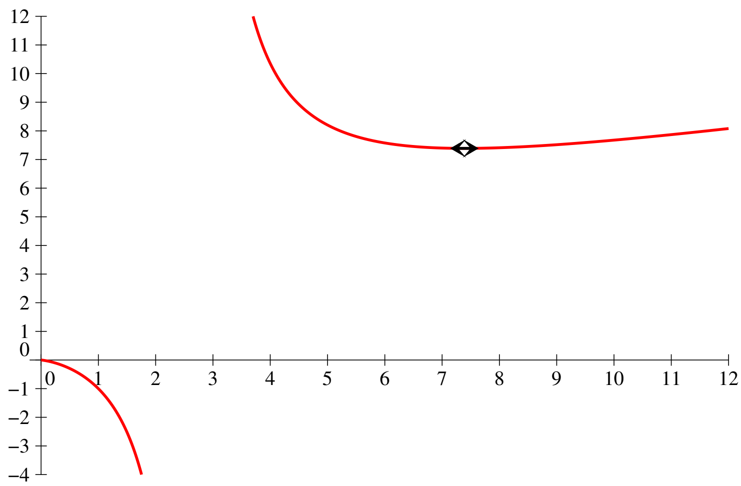
Et une allure de la courbe :



2. La fonction f_2 est définie et dérivable sur $]0, e[\cup]e, +\infty[$ (le dénominateur s'annulant lorsque $\ln(x) = 1$, donc $x = e$), de dérivée $f_2'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1 - 1}{(\ln(x) - 1)^2} = \dfrac{\ln(x) - 2}{(\ln(x) - 1)^2}$. L'étude de variations ne pose donc aucun problème, la dérivée s'annule lorsque $\ln(x) = 2$, soit $x = e^2$, et f_2 admet un minimum local à cet endroit de valeur $f_2(e^2) = \dfrac{e^2}{2 - 1} = e^2$. Il n'y a pas de forme indéterminée pour la limite en 0 : $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = 0$. Pas de problème non plus en e où le numérateur a une limite finie : $\lim\limits_{x \to e^-} f_2(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to e^+} f_2(x) = +\infty$. Seule la limite en $+\infty$ pose problème si on ne connait pas les résultats classiques de croissance comparée, contentons-nous de signaler que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$ (la croissance du numérateur étant plus rapide que celle du dénominateur).
On peut donc dresser le tableau de variations suivant :

x	0		e ‖		e^2		$+\infty$
f_2	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	e^2	$\nearrow$	$+\infty$

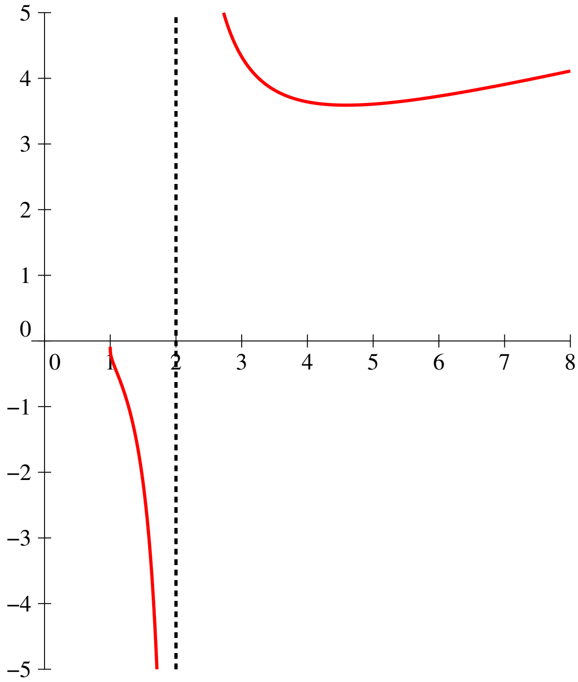
Et une allure de courbe (les plus motivés pourront constater que la dérivée f_2' admet une limite nulle quand x tend vers 0, ce qui justifie le fait que la courbe démarre « horizontalement » à l'origine du repère) :



3. La fonction f_3 est très différente de la précédent, mais si elle n'en a pas l'air au premier abord. Elle est définie sur $]1,2[\cup]2,+\infty[$ (cette fois-ci le dénominateur s'annule lorsque $x-1=1$, soit $x=2$), de dérivée $f_3'(x)=\dfrac{\ln(x-1)-\frac{x}{x-1}}{(\ln(x-1))^2}=\dfrac{(x-1)\ln(x-1)-x}{(x-1)\ln(x-1)}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif sur le domainde de définition de f_3, par contre le signe de son numérateur n'est pas évident. On peut toutefois poser $g(x)=(x-1)\ln(x-1)-x$ et dériver à nouveau : $g'(x)=\ln(x-1)+\dfrac{x-1}{x-1}-1=\ln(x-1)$. La fonction g est donc décroissante sur $]1,2[$ et croissante sur $]2,+\infty[$. À l'aide de croissances comparées, on peut prouver que $\lim\limits_{x\to1}g(x)=-1$, donc g (et par conséquent f_3') est négative sur tout l'intervalle $]1,2[$, ce qui prouve la décroissance de f_3 sur cet intervalle. De plus, $g(2)=-2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ (on factorise tout par x puis on utilise de la croissance comparée), donc la fonction g s'annule exactement une fois sur $]2,+\infty[$, en une valeur α qu'on ne peut pas calculer. La fonction f_3 est alors décroissante sur $]2,\alpha[$, puis croissante sur $]\alpha,+\infty[$. Comme par définition on a $g(\alpha)=0$, on peut dire que $\ln(\alpha-1)=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$, et donc que $f_3(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\ln(\alpha-1)}=\alpha-1$ (ce qui ne nous avance pas beaucou puisqu'on ne connait pas α). Les limites posent moins de problèmes : $\lim\limits_{x\to1}f_3(x)=0$; $\lim\limits_{x\to2^-}f_3(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to2^+}f_3(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f_3(x)=+\infty$ (il s'agit pour cette dernière limite de croissance comparée). D'où le tableau suivant :

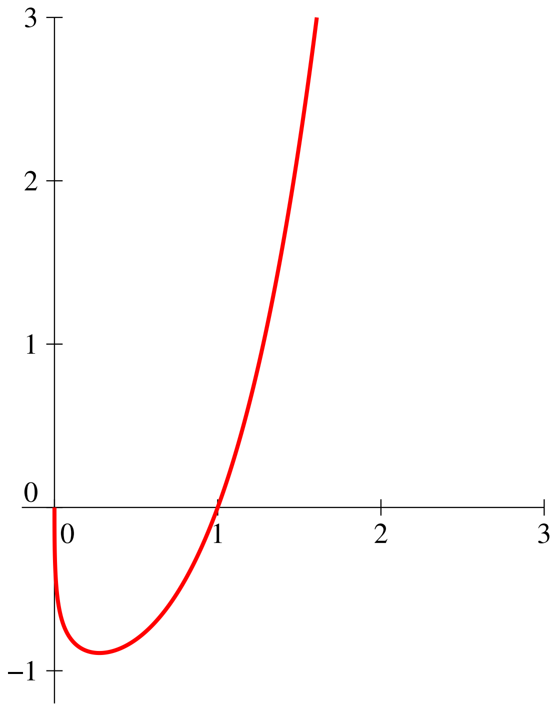
x	1	2		α	$+\infty$
f_3	0 ↘	$-\infty$ ||	$+\infty$ ↘	$\alpha-1$ ↗	$+\infty$

Et la courbe qui va avec (avec une belle calculatrice, on peut obtenir $\alpha\simeq4.7$) :

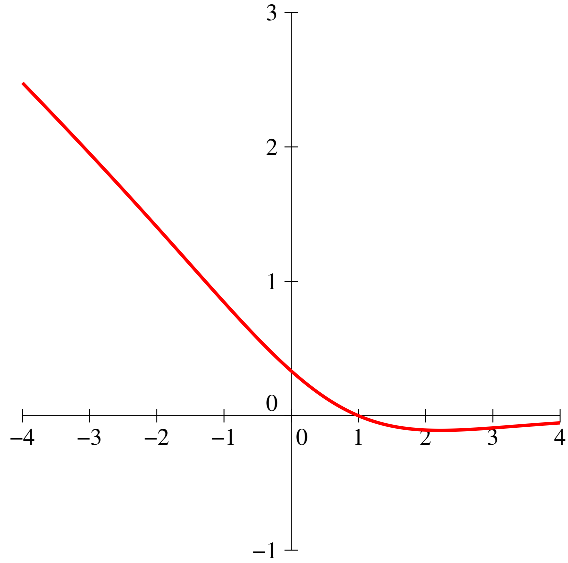


4. Il faut donc redériver la fonction $f_1' : x \mapsto \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$, qui est définie sur $]-\infty, 1[$. On calcule $f_4'(x) = \frac{-6\sqrt{1-x} - (2-3x) \times \frac{-2}{2\sqrt{1-x}}}{4(1-x)} = \frac{-6(1-x) + (2-3x)}{4(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3x-4}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée est du signe de $3x-4$, qui est toujours négatif sur l'intervalle de définition de f_4. La fonction est donc bêtement décroissante sur $]-\infty, 1[$. De plus, $\lim_{x \to 1} f_4(x) = -\infty$, et $\lim_{x \to -\infty} f_4(x) = +\infty$ (on peut factoriser en haut et en bas par $\sqrt{-x}$, en faisant quand même attention au fait que x est négatif). On se passera pour une fois du tableau de variations sans intérêt, et même de la courbe qui n'en a guère plus.
5. Le dénominateur de la fonction f_5 étant toujours positif (il a pour discriminant $\Delta = 1-8 < 0$), la fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Un passionnant calcul de dérivée de quotient donne $f_5'(x) = \frac{(3x^2-2)(x^2+x+2) - (2x^2+1)(x^3-2x+1)}{(x^2+x+2)^2}$ $= \frac{3x^4+3x^3+4x^2-2x-4-(2x^5-x^3+2x^2-2x+1)}{(x^2+x+2)^2} = \frac{-2x^5+3x^4+4x^3+2x^2-5}{(x^2+x+2)^2}$, une dérivée qu'on se gardera bien de tenter d'étudier !
6. La fonction f_6 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Un produit de trois fonctions se dérive comme un produit de deux fonctions (on dérive successivement chacune des fonctions), mais si on a des doutes, on peut toujours se contenter de dériver un produit de deux fonctions en prenant comme deuxième fonction le produit des fonctions exponentielle et ln par exemple). D'une façon ou d'une autre, on trouve $f_6'(x) = \frac{e^x \ln(x)}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}e^x \ln(x) + \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \frac{e^x \ln(x) + 2xe^x \ln(x) + 2e^x}{2\sqrt{x}} = \frac{e^x(2 + \ln(x) + 2x\ln(x))}{2\sqrt{x}}$. Cette dérivée est du signe de $h(x) = 2 + \ln(x) + 2x\ln(x)$. On peut l'étudier en dérivant à nouveau cette fonction h : $h'(x) = \frac{1}{x} + 2\ln(x) + 2$, puis en dérivant encore une fois : $h''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{2x-1}{x^2}$. On déduit de ces palpitants calculs que la fonction h' est décroissante sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et croissante sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, et en particulier qu'elle admet un minimum en $\frac{1}{2}$, de valeur $h'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) + 2 =$

$4 - 2\ln(2) > 0$ (car $\ln(2)$ est largement inférieur à 2, c'est même plus petit que 1). Tout ça donc pour se rendre compte que la fonction h' est toujours positive, et donc que h est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. En écrivant $h(x) = 2 + \ln(x)(1 + 2x)$, on obtient $\lim\limits_{x \to 0} h(x) =$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$, on en déduit que h va s'annuler une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$, et que f_6 sera donc décroissante puis croissante sur son intervalle de définition. On a bien sûr $f_6(0) = 0$ (ainsi d'ailleurs que $f_6(1) = 0$ si on souhaite avoir un point de repère supplémentaire pour le tracé de la courbe) et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_6(x) = +\infty$, ce qui donne une allure de courbe ressemblant à ceci (on ne peut pas calculer précisément les coordonnées du minimum) :



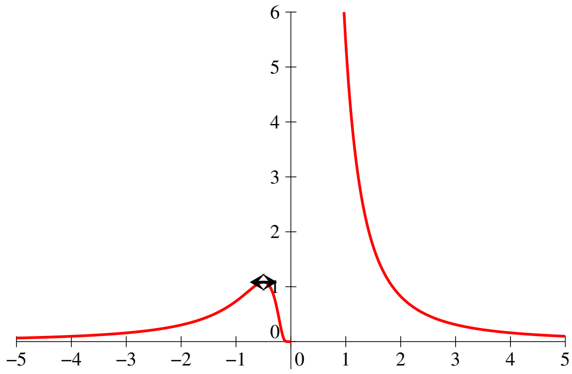
7. Le dénominateur de f_7 ne pouvant s'annuler (une exponentielle étant toujours positive), cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$. Elle y est dérivable, et $f_7'(x) = \dfrac{-(e^x + 2) - (1 - x)e^x}{(e^x + 2)^2} = \dfrac{(x - 2)e^x - 2}{(e^x + 2)^2}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur $i(x) = (x - 2)e^x - 2$. Là encore, on peut redériver pour étudier les variations : $i'(x) = e^x + (x - 2)e^x = (x - 1)e^x$. Cette dérivée est du signe de $x - 1$, donc i est décroissante sur $] - \infty, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$, avec pour minimum $i(1) = -e - 2 < 0$. À l'aide de la croissance comparée on peut affirmer que $\lim\limits_{x \to -\infty} i(x) = -2$ (la limite nulle de l'exponentielle l'emporte sur la limite infinie du $x - 2$), et sans croissance comparée on a bien sûr $\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = +\infty$. La fonction i est donc négative sur $] - \infty, 1]$, mais s'annule une fois sur $[1, +\infty[$ avant de devenir positive. On en déduit que f_7 est décroissante sur un intervalle de la forme $] - \infty, \beta]$ et croissante sur $[\beta, +\infty[$, pour un certain réel $\beta > 1$. On calcule sans difficulté $\lim\limits_{x \to -\infty} f_7(x) = +\infty$ (le dénominateur ayant pour limite 2), par contre on a encore besoin d'une croissance comparée pour dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_7(x) = 0$. Là encore, le tableau de variations n'a guère d'intérêt, on ne peut pas calculer les coordonnées du minimum, on constate simplement que f_7 s'annule en 1 et on trace une allure de courbe :



8. La fonction f_8 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée $f_8'(x) = -\frac{4}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{2}{x^2} \times \frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} = -\frac{4x+2}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, donc de $-2x-1$. La fonction est donc croissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[$, puis décroissante sur $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$ et sur $]0, +\infty[$. Elle admet pour maximum $f_8\left(-\frac{1}{2}\right) = 8e^{-2} = \frac{8}{e^2}$. Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f_8(x) = 0$. Pas de problème pour déterminer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f_8(x) = +\infty$ (il n'y a pas de forme indéterminée de ce côté-là, limite infinie au numérateur et nulle au dénominateur), par contre on a besoin de croissance comparée pour conclure que $\lim\limits_{x \to 0^-} f_8(x) = 0$ (l'exponentielle qui a une limite l'emportant sur le dénominateur qui tend aussi vers 0). Un tableau de variations pour cette fonction :

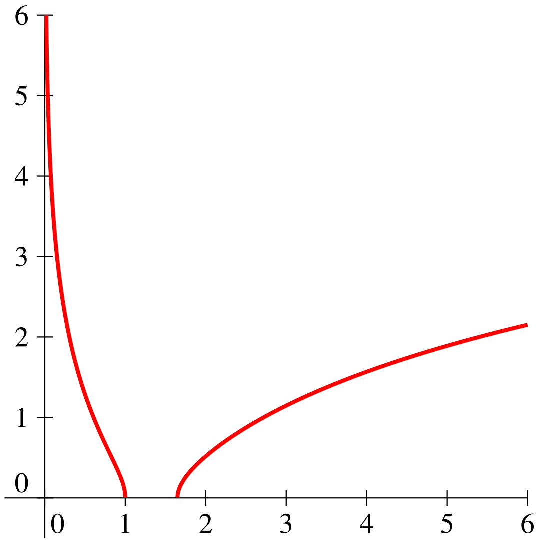
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
f_8	0	$\nearrow$	$\frac{8}{e^2}$	$\searrow$	0 ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Et la courbe qui va avec :

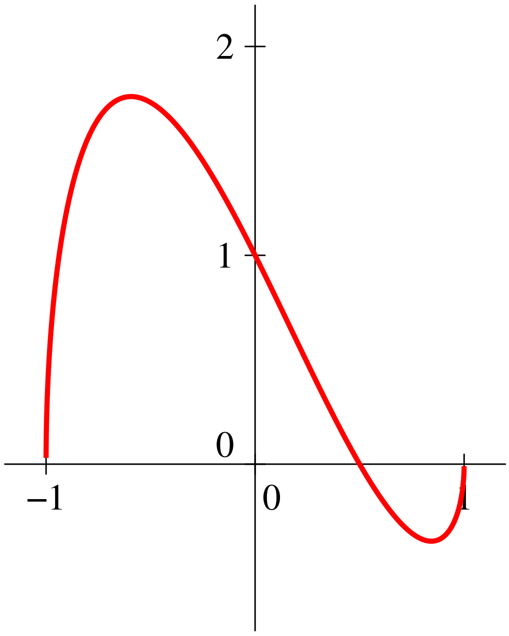


9. On peut en fait écrire plus simplement $f_9(x) = \sqrt{2(\ln(x))^2 - \ln(x)}$ en se rappelant que $\ln(x^2) = 2\ln(x)$. Cette fonction est définie lorsque $2\ln(x)^2 - \ln(x) \geqslant 0$, soit $\ln(x)(2\ln(x)-1) \geqslant$

0, ce qui se produit lorsque $x \in]0,1] \cup [\sqrt{e}, +\infty[$ (on fait un petit tableau de signe pour s'en convaincre si besoin). La fonction est dérivable partout sauf aux bornes de ces intervalles, de dérivée $f_9'(x) = \dfrac{\frac{4\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}}{2f_9(x)} = \dfrac{4\ln(x) - 1}{2xf_9(x)}$. Pas besoin de plus détailler le dénominateur qui est de toute façon toujours positif quand f_9 est définie, $f'9$ est donc du signe de $4\ln(x) - 1$, et s'annulerait donc en $e^{\frac{1}{4}}$ si ce nombre appartenait à son domaine de définition. Comme il est en fait compris entre 1 et $\sqrt{E}$, f_9 est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $\sqrt{e}, +\infty[$. Elle s'annule bien entendu lorsque $x = 1$ et $x = \sqrt{e}$, et $\lim_{x\to 0} f_9(x) = +\infty$ (pas de forme indéterminée), et $\lim_{x\to+\infty} f_9(x) = +\infty$ (on factorise simplement par $\ln(x)$ sous la racine carrée pour lever l'indétermination). La courbe ressemble à ceci :



10. La fonction f_{10} est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée $f_{10}'(x) = -2\sqrt{1-x^2} + (1-2x) \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-2(1-x^2) - x(1-2x)}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{4x^2 - x - 2}{\sqrt{1-x^2}}$. Cette dérivée est du signe de son numérateur, dont le discriminant vaut $\Delta = 1 + 32 = 33$, et qui admet donc deux racines absolument dégueulasses mais qui ont le mauvais goût de se trouver toutes les deux entre -1 et 1. La fonction est donc croissance, puis décroissante, puis à nouveau croissante sur $[-1,1]$, mais le détail des calculs n'a vraiment pas le moindre intérêt. Pour information, la courbe ressemble à ceci :



2
1
0
−1
0
1