

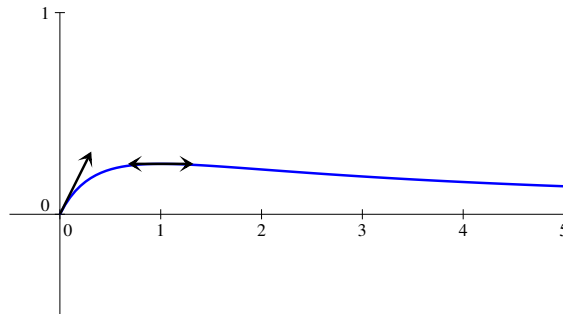
AP n° 13 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

12 juin 2020

Exercice 1

1. (a) La fonction f est dérivable comme quotient de fonctions usuelles, et $f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x+1-2x}{(x+1)^3} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$. L'étude du signe ne pose bien sûr aucun problème : le dénominateur est positif sur notre intervalle d'étude, et le numérateur change de signe pour $x = 1$. La dérivée f' est donc positive sur $[0, 1]$ et négative sur $[1, +\infty[$.
- (b) On peut par exemple écrire $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x^2} \sim \frac{1}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- (c) On sait que $\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x)$, donc $\frac{1}{(1+x)^2} = (1 - x + o(x))^2 = 1 - 2x + o(x)$, puis $f(x) = x - 2x^2 + o(x^2)$ (inutile de pousser le premier développement limité plus loin que l'ordre 1 puisqu'on va multiplier par x ensuite).
- (d) Puisque la fonction f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, une équation de sa tangente est obtenue en prenant la partie de ce développement limité, soit $y = x$. De plus, $f(x) - x = -2x^2 + o(x^2) \sim -2x^2 \leq 0$, ce qui permet d'affirmer que $f(x) - x \leq 0$ sur un voisinage de 0. Autrement dit, la courbe de f est en-dessous de sa tangente au voisinage de 0.
- (e) Le seul calcul supplémentaire nécessaire est celui de $f(1) = \frac{1}{4}$. On obtient l'allure de courbe suivante :



2. (a) On a déjà calculé plus haut $u_1 = f(1) = \frac{1}{4}$. Reste $u_2 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} = \frac{4}{25}$.
- (b) On peut bien sûr procéder par récurrence. Notons P_n la propriété : $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$. La propriété P_1 est manifestement vraie. Supposons désormais $0 < u_n \leq \frac{1}{n}$. La fonction f étant croissante sur l'intervalle $[0, 1]$, et donc sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, on en déduit que $f(0) < f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n}\right)$. Or $f(0) = 0$, et $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} < \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$. La propriété P_{n+1} est donc vérifiée, ce qui prouve que P_n est vrai pour tout entier n .

- (c) Il suffit d'appliquer le théorème des gendarmes à l'encadrement précédent pour conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
3. (a) Exprimons : $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{(1+u_n)^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+2u_n+u_n^2-1}{u_n} = 2+u_n$. L'encadrement demandé est alors une conséquence triviale de celui de la question 2.b.
- (b) Effectuons donc une récurrence comme on nous le demande : au rang 2, $2 \times (2+1) = 6$, et $2 \times 3 + \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 6 + 1 = 7$. Or, on a calculé $u_2 = \frac{4}{25}$, soit $\frac{1}{u_2} = \frac{25}{4}$, qui est bien compris entre 6 et 7. Supposons désormais l'encadrement vrai au rang n , on peut alors écrire $\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + v_n$, avec $2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ (hypothèse de récurrence), et $2 \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{n}$. En additionnant ces deux encadrements, on trouve exactement $2(n+2) \leq \frac{1}{u_{n+1}} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, ce qui prouve exactement l'hérédité de notre propriété. Par principe de récurrence, celle-ci est vraie pour tout entier $n \geq 2$.
- (c) Quel que soit le réel t appartenant à l'intervalle $[k-1, k]$, on a $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{t}$. On peut intégrer cette inégalité entre $k-1$ et k pour obtenir $\int_{k-1}^k \frac{1}{k} dt \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$, soit $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt$ (relation valable pour tout entier $k \geq 1$). On peut ensuite additionner ces inégalités pour toutes les valeurs de k comprises entre 2 et n : $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{t} dt = \int_1^n \frac{1}{t} dt$ (relation de Chasles). Cette dernière intégrale valant $[\ln(t)]_1^n = \ln(n)$, on en déduit que $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n)$, puis $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$ en ajoutant le premier terme (on ne peut évidemment pas majorer la somme directement à partir de $k=1$).
4. En reprenant l'encadrement de la question 2.b et le résultat précédent, on peut écrire $2n+2 \leq \frac{1}{u_n} \leq 2n+3+\ln(n)$, soit $2n+o(n) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2n+o(n)$. On en déduit que $\frac{1}{u_n} \sim 2n$ (pour rédiger vraiment rigoureusement, le mieux est quand même de diviser tout l'encadrement par $2n$ et d'appliquer la théorème des gendarmes pour justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2nu_n} = 1$). On peut passer cet équivalent à l'inverse pour trouver $u_n \sim \frac{1}{2n}$.

Exercice 2

1. Pour déterminer cette matrice, on peut calculer les images par f des quatre matrices de la base canonique de E . Pour gagner du temps, calculons directement $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$. On en déduit que $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; et $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice de f dans la base canonique est donc $A =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Les calculs de la question précédente permettent de vérifier immédiatement que $f \circ f = \text{id}$ (alternativement, on peut constater que $A^2 = I_4$). L'application f est donc une symétrie, c'est un automorphisme et sa réciproque est f elle-même.
3. Le plus simple est encore de revenir à la définition de $f : f(M) \times f(N) = JMJJNJ = JMJ^2NJ$. Or, $J^2 = I_2$ (calcul immédiat), donc $f(M)f(N) = JMNJ = f(MN)$.
4. Les éléments de F sont les matrices M vérifiant $f(M) = M$. En reprenant l'expression générale de f calculée à la première question, cela impose les conditions suivantes sur les coefficients de la matrice : $a = d$ et $b = c$. Autrement dit, $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. En particulier, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de F (il est évident que cette famille est libre). De même, G est constitué des matrices vérifiant $f(M) = -M$, ce qui impose cette fois-ci $a = -d$ et $c = -b$, soit $G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$. Là encore, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de G .
5. On souhaite donc écrire $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & t \\ -t & -z \end{pmatrix}$. L'identification des coefficients conduit au système
$$\begin{cases} x + z = a \\ y + t = b \\ y - t = c \\ x - z = d \end{cases}$$
. Les équations extrêmes donnent $x = \frac{a+d}{2}$ (en les additionnant) et $z = \frac{a-d}{2}$ (en les soustrayant); de même $y = \frac{b+c}{2}$ et $t = \frac{b-c}{2}$. La solution étant unique, la décomposition de M l'est également, et on a donc $M_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+d & b+c \\ b+c & a+d \end{pmatrix}$ et $M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a-d & b-c \\ c-b & d-a \end{pmatrix}$. Pour la matrice M donnée dans l'énoncé, $M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$.
6. Surtout pas de calcul avec les coefficients des matrices, c'est inutile! Si A et B appartiennent à F , alors $f(A) = A$ et $f(B) = B$. En appliquant la relation démontrée à la question 3, $f(AB) = f(A)f(B) = AB$, donc $AB \in F$. De même, si A et B , appartiennent à G , $f(A) = -A$ et $f(B) = -B$, donc $f(AB) = (-A) \times (-B) = AB$. Autrement dit $AB \in F$.
7. Autant exploiter les résultats précédents : $MN = (M_1 + N_1)(M_2 + N_2) = M_1N_1 + M_1N_2 + M_2N_1 + M_2N_2$. La question précédente assure que M_1N_1 (produit de matrices de F) et M_2N_2 (produits de matrices de G) appartiennent à F , donc $M_1N_1 + M_2N_2 \in F$ (c'est un sous-espace vectoriel). Or, on peut démontrer tout aussi facilement que le produit d'une matrice de F par une matrice de G appartient à G : si $f(A) = A$ et $f(B) = -B$, alors $f(AB) = A \times (-B) = -AB$ (et de même dans l'autre sens). On en déduit alors que $M_1N_2 + M_2N_1 \in G$. La décomposition étant unique, on conclut : $(MN)_1 = M_1N_1 + M_2N_2$, et $(MN)_2 = M_1N_2 + M_2N_1$.

Exercice 3

A. Propriétés générales de la fonction f .

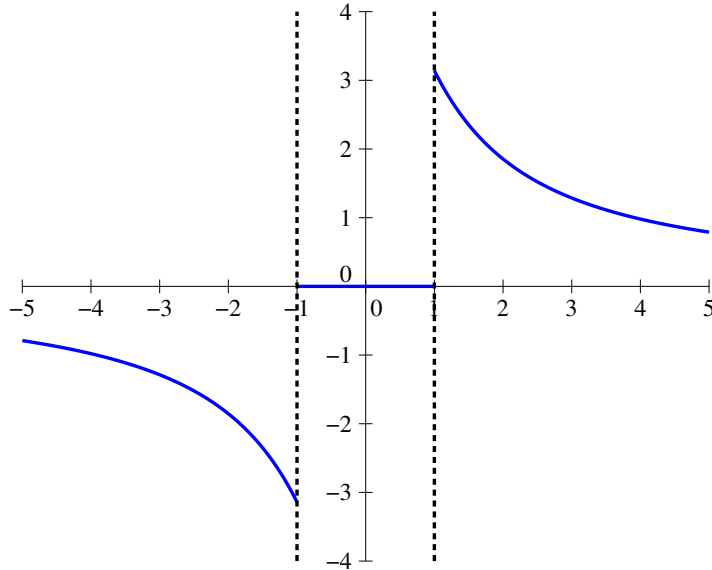
1. La fonction arctan étant définie sur \mathbb{R} tout entier, le deuxième morceau de la formule définissant f est défini sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (valeurs annulant le dénominateur à l'intérieur de l'arctangente). Pour le premier morceau, ce qui est dans la parenthèse est toujours définie, mais il faut vérifier que $\frac{2x}{1+x^2} \in [-1, 1]$ pour pouvoir lui appliquer la fonction arcsinus. Une façon rapide de faire : pour tout réel x , $(1+x)^2 \geq 0$, donc $1+x^2 \geq -2x$. De même, $(1-x)^2 \geq 0$ implique $1+x^2 \geq 2x$. On en déduit qu'on a toujours $|2x| \leq 1+x^2$, donc $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$, ce qui démontre l'encadrement souhaité.
2. Les deux expressions $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ et $x \mapsto \frac{2x}{1-x^2}$ sont impaires. Quand on les compose par les fonctions impaires arcsin et arctan, on obtient des fonctions impaires. La fonction f est donc elle-même impaire, on se contentera de l'étudier sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$.
3. Facile : $f(0) = \arcsin(0) + \arctan(0) = 0$ (on pouvait aussi utiliser le fait que f est impaire).
Moins facile : $f(\sqrt{3}) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.
4. Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1+x^2} = 1$, on a $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$. De plus, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$; et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.
Finalement, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$, et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \pi$. Aucun problème pour la limite en $+\infty$: les deux parenthèses tendent vers 0, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

B. Variations et courbe de f .

1. La dérivabilité du second morceau (avec l'arctangente) est évident, c'est une composée de fonctions dérivables sur le domaine de définition de f . Par contre, il faut faire attention avec l'arcsinus qui n'est pas dérivable en 1 et en -1 : les seules valeurs de x pour lesquelles $\frac{2x}{1+x^2} = \pm 1$ sont $x = 1$ et $x = -1$ (c'est une conséquence du calcul effectué à la question A.1, il s'agit des valeurs annulant $(1+x)^2$ et $(1-x)^2$). Comme ces valeurs ont déjà été supprimées du domaine de définition de f , la fonction est bien dérivable sur tout ce domaine.
Posons $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ et $h(x) = \frac{2x}{1-x^2}$, on calcule d'abord $g'(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$, et $h'(x) = \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}$. Ensuite, on compose : $(\arcsin \circ g)'(x) = g'(x) \times \frac{1}{\sqrt{1-g(x)^2}} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \times \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}}$.
Sur $[0, 1[$, $1-x^2 > 0$, donc $(\arcsin \circ g)'(x) = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{2}{1+x^2}$. Sur $]1, +\infty[$, $1-x^2 < 0$, et $(\arcsin \circ g)'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$. De l'autre côté, $(\arctan \circ h)'(x) = \frac{h'(x)}{1+h(x)^2} = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2} \times \frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} = \frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2+4x^2} = \frac{2+2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}$. On obtient bien $f'(x) = 0$ sur $[0, 1[$, et $f'(x) = -\frac{4}{1+x^2}$ sur $]1, +\infty[$.
2. La fonction f est constante sur $[0, 1[$ et $f(0) = 0$, donc $f(x) = 0$ quel que soit $x \in [0, 1[$. Sur $]1, +\infty[$, la formule obtenue pour la dérivée permet d'affirmer que $f(x) = -4\arctan(x) + k$

pour une certaine constante k . On peut par exemple utiliser la limite en 1^+ pour déterminer la constante k : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -4 \times \frac{\pi}{4} + k = k - \pi$. Or, on a vu par ailleurs que cette limite était égale à π , donc $k = 2\pi$ et $f(x) = 2\pi - 4 \arctan(x)$ sur $]1, +\infty[$.

3. On dispose de toutes les informations nécessaires pour tracer la courbe. Les plus courageux iront jusqu'à constater que la fonction prolongée par continuité à droite en 1 y admet une tangente verticale (on utilise par ailleurs la symétrie par rapport à l'origine du repère pour compléter la courbe) :



C. Des équations différentielles.

- Sur l'intervalle $[0, 1[$, l'équation se résume à $y' = 0$, les solutions en sont les fonctions constantes. Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, les solutions seront de la forme $Ke^{-f(x)}$, donc $y(x) = Ke^{4 \arctan(x)}$ (quitte à faire passer le facteur $e^{-2\pi}$ dans la constante).
- (a) Les plus paresseux écriront $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{x - (x-1)}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$, soit $a = -1$ et $b = 1$. Les autres mettront au même dénominateur et feront une identification.
- (b) On connaît déjà les solutions de l'équation homogène associée, donnée à la question 1. Cherchons une solution particulière à l'aide de la méthode de variation de la constante, en posant $y_p(x) = K(x)e^{4 \arctan(x)}$. On calcule alors $y_p'(x) = K'(x)e^{4 \arctan(x)} + \frac{4K(x)}{1+x^2}e^{4 \arctan(x)}$, puis $y_p'(x) + f'(x)y_p(x) = K'(x)e^{4 \arctan(x)} + \frac{4K(x)}{1+x^2}e^{4 \arctan(x)} - \frac{4K(x)e^{4 \arctan(x)}}{1+x^2} = K'(x)e^{4 \arctan(x)}$. La fonction y_p est donc solution de notre équation différentielle si $K'(x)e^{4 \arctan(x)} = \frac{e^{4 \arctan(x)}}{x(x-1)}$, soit $K'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$. On prend par exemple $K(x) = \ln(x-1) - \ln(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$, soit $y_p(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{4 \arctan(x)}$. Toutes les solutions de l'équation sont alors les fonction de la forme $y(x) = \left(K + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)e^{4 \arctan(x)}$.
- (a) Un calcul classique : $\operatorname{sh}^2(t) = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\operatorname{ch}(2t) - 1}{2}$.
- (b) Puisqu'on nous le propose si gentiment, effectuons le changement de variable $x = \operatorname{ch}(t)$, ce qui donne $dx = \operatorname{sh}(t) dt$, donc $\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \int \operatorname{sh}(t) \sqrt{\operatorname{ch}^2(t) - 1} dt$. Or $\operatorname{ch}^2(t) - 1 =$

$\text{sh}^2(t)$, et sur l'intervalle considéré, $\text{sh}(t) > 0$, donc $\int \sqrt{x^2 - 1} \, dx = \int \text{sh}^2(t) \, dt = \int \frac{\text{ch}(2t) - 1}{2} \, dt = \frac{\text{sh}(2t)}{4} - \frac{t}{2}$. Il reste tout de même un tout petit détail à régler : réussir à exprimer t en fonction de x , autrement dit, déterminer la fonction réciproque de la fonction ch (restreinte à $[0, +\infty[$). En fait, ça se fait très bien : $\text{ch}(t) = x$ revient à $e^t + e^{-t} = 2x$, soit $e^{2t} - 2xe^t + 1 = 0$. On pose $T = e^t$ pour se ramener à l'équation du second degré $T^2 - 2xT + 1 = 0$, qui admet pour discriminant $\Delta = 4x^2 - 4 = 4(x^2 - 1) > 0$ (on a supposé $x > 1$), et admet pour racines $T_1 = \frac{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}}{2} = x + \sqrt{x^2 - 1}$, et $T_2 = x - \sqrt{x^2 - 1}$. On conserve la racine positive et on obtient alors $t = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Les primitives recherchées sont donc de la forme $\frac{\text{sh}(2 \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}))}{4} - \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{2}$ (à une constante près). Avec un peu de motivation, on peut simplifier le premier morceau : $\text{sh}(2 \ln(a)) = \text{sh}(\ln(a^2)) = \frac{e^{\ln(a^2)} - e^{-\ln(a^2)}}{2} = \frac{a^2 - \frac{1}{a^2}}{2}$, donc le premier morceau de notre primitive devient $\frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2}{8} - \frac{1}{8(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^4 - 1}{8(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} = \frac{x^4 + 4x^3\sqrt{x^2 - 1} + 6x^2(x^2 - 1) + 4x(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} + (x^2 - 1)^2 - 1}{8(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} = \frac{8x^4 - 4x^2 + (8x^3 - 4x)\sqrt{x^2 - 1}}{8(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}(2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2 - 1})}{2(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} = \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2}$.

- (c) Par le même calcul de variation de la constante que plus haut, on obtient la condition $K'(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. On peut donc prendre pour K la fonction obtenue ci-dessus, et les solutions complètes de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme $y(x) = \left(K + \frac{x\sqrt{x^2 - 1}}{2} - \frac{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}{2} \right) e^{4 \arctan(x)}$.