AP n° 13

PTSI B Lycée Eiffel

12 juin 2020

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$. On notera $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Étude de la fonction f.
   (a) Calculer la dérivée f' de la fonction f et étudier son signe.
   (b) Déterminer la limite de f quand x tend vers $+\infty$.
   (c) Calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f quand x tend vers 0.
   (d) En déduire une équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}_f$, ainsi que la position relative de cette tangente et de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0 (on justifiera rigoureusement ce dernier point).
   (e) Tracer une allure représentative de $\mathcal{C}_f$ tenant compte de tous les calculs effectués.
2. Étude d'une suite récurrente. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
   (c) Montrer que la suite (u_n) converge, et préciser sa limite.
3. On définit une suite auxiliaire (v_n) par la relation $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Exprimer v_n en fonction de u_n et en déduire que $2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \dfrac{1}{n}$.
   (b) Montrer par récurrence que, $\forall n \geqslant 2$, on a l'encadrement $2(n+1) \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k}$.
   (c) À l'aide d'une comparaison entre $\dfrac{1}{k}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{1}{t}\,dt$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \leqslant 1 + \ln(n)$.
4. Déduire des questions précédentes que $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

Exercice 2

On note dans tout cet exercice $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2, et on pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note f l'application de E dans lui-même définie par $f(M) = JMJ$.

1. Déterminer la matrice représentative A de f dans la base canonique de E.
2. Que vaut $f \circ f$? Que peut-on en déduire sur l'application linéaire f ? Prouver en particulier que f est un automorphisme de E, et donner sa réciproque f^{-1}.
3. Vérifier que $\forall (M,N) \in E^2$, $f(MN) = f(M)f(N)$.

4. Déterminer une base des espaces vectoriels $F = \ker(f - \mathrm{id})$ et $G = \ker(f + \mathrm{id})$.
5. Soit $M \in E$, montrer qu'il existe un unique couple de matrices (M_1, M_2), avec $M_1 \in F$ et $M_2 \in G$, telles que $M = M_1 + M_2$. On écrira explicitement les deux matrices M_1 et M_2. Calculer les matrices M_1 et M_2 lorsque $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
6. Montrer que l'espace vectoriel F est stable par produit matriciel : $\forall (A, B) \in F^2$, $AB \in F$. Que peut-on dire du produit de deux matrices appartenant à G ?
7. Soient M et N deux matrices de E, déterminer les matrices $(MN)_1$ et $(MN)_2$ en fonction de M_1, M_2, N_1 et N_2.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right) - \arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$.

A. Propriétés générales de la fonction f.

1. Justifier rigoureusement que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$.
2. Étudier la parité de la fonction f, et en déduire son ensemble d'étude.
3. Calculer $f(0)$ et $f(\sqrt{3})$.
4. Déterminer les limites de f en 1 et en $+\infty$.

B. Variations et courbe de f.

1. Montrer que f est dérivable sur les intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$, et que
$$\begin{cases} f'(x) = 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ f'(x) = -\dfrac{4}{1+x^2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$
2. En déduire une expression simplifiée de $f(x)$ sur chacun des intervalles du domaine d'étude.
3. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

C. Des équations différentielles.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + f'(x)y = 0$ sur chacun des intervalles $[0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
2. (a) Déterminer deux réels a et b tels que, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$, $\dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x-1}$.
   (b) Résoudre sur l'intervalle $]1, +\infty[$ l'équation différentielle $y' + f'(x)y = \dfrac{e^{4\arctan(x)}}{x(x-1)}$.
3. (a) Démontrer que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}^2(t) = \dfrac{\mathrm{ch}(2t) - 1}{2}$.
   (b) En déduire les primitives sur l'intervalle $]1, +\infty[$ de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (on posera $x = \mathrm{ch}(t)$).
   (c) Résoudre sur ce même intervalle l'équation différentielle $y' + f'(x)y = \sqrt{x^2 - 1}e^{4\arctan(x)}$.