AP n$^{\text{o}}$ 12 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

29 mai 2020

Problème

1. Faisons donc une récurrence, puisqu'on nous le demande si gentiment. Au rang 0, $L+A^0(U_0-L) = L+U_0-L = U_0$, donc la propriété est vérifiée. Supposons-la vraie au rang n, alors $U_{n+1} = AU_n + B = A(L+A^n(U_0-L)) + B = AL + A^{n+1}(U_0-L) + B = L + A^{n+1}(U_0-L)$ puisque $L = AL+B$ par hypothèse. D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout entier n.

2. (a) On peut utiliser les colonnes de la matrice B pour affirmer que $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Vect}((3,1,2), (-1,0,-1), (-2,-1,-1))$. On constate que la somme des trois vecteurs donne le vecteur nul, on peut donc supprimer le dernier. Tant qu'à faire, remplaçons le deuxième par son opposé, et gardons également la différence du deuxième et du troisième, soit $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Vect}((1,0,1),(1,1,0))$. L'équation $-x+y+z=0$, peut se traduire par $x = y+z$, et a pour solutions $\{(y+z,y,z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,0,1))$, c'est bien le même sous-espace que $\mathrm{Im}(b)$. L'application $id-a$ admet pour matrice dans la base canonique, à un facteur 6 près qui ne changera pas l'image, $\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Là aussi, la somme des trois colonnes est nulle, donc $\mathrm{Im}(id-a) = \mathrm{Vect}((6,4,2),(-3,0,-3)) = \mathrm{Vect}((3,2,1),(1,0,1))$ quitte à diviser par des constantes. On peut remplacer le premier vecteur par $\frac{1}{2}((3,2,1)-(1,0,1)) = (1,1,0)$ pour retrouver le même base que pour l'espace précédent (et donc la même image).

   (b) Puisqu'on vient de déterminer la matrice de $id-a$ (le noyau est le même que pour $a-id$), il suffit de résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 6x & - & 3y & - & 3z & = & 0 \\ 4x & & & - & 4z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$. La deuxième équation donne immédiatement $x = z$, et la première $2x - y - z = 0$, soit $y = 2x - z = x$. La troisième équation est alors automatiquement vérifiée, donc $\ker(a - id) = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1,1))$.

   (c) Puisque la famille est constituée de trois vecteurs dans un espace de dimension 3, il suffit de prouver qu'elle est libre. Supposons que $a(1,1,1) + b(1,0,1) + c(0,-1,1) = 0$, alors $a+b = a-c = a+b+c = 0$. On a donc $b = -a$ et $c = a$, ce qui impose $a = 0$ et donc $b = c = 0$. La famille est bien libre, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (d) Il suffit d'écrire les vecteurs en colonne : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On a le choix entre calculer l'inverse P^{-1} de notre matrice de passage et utiliser la formule de changement de base, ou calculer les images de nos trois vecteurs par chacune des applications, et espérer que leurs coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ seront faciles à obtenir. Dans ce corrigé, on utilisera la deuxième méthode, mais l'inverse de P est de toute façon indispensable un peu plus loin. Puisque $a(x,y,z) = \frac{1}{6}(3y+3z, -4x+6y+4z, -2x+3y+5z)$, on obtient

$a(u) = \frac{1}{6}(6,6,6) = (1,1,1) = u$; $a(v) = \frac{1}{6}(3,0,3) = \frac{1}{2}v$; et $a(w) = \frac{1}{6}(0,-2,2) = \frac{1}{3}w$. Autrement dit, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. On procède de même pour b : $b(x,y,z) = (3x-y-2z, x-z, 2x-y-z)$, donc $b(u) = (0,0,0)$; $b(v) = (1,0,1) = v$; et $b(w) = (-1,-1,0)$. On constate que $(-1,-1,0) = (0,-1,1) - (1,0,1)$ (et si on ne le constate pas, on trouve les coordonnées de ce vecteur dans la base $\mathcal{B}$ en résolvant un système) pour obtenir $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. C'est une récurrence classique : la formule de changement de base nous assure que $D = P^{-1}AP$, soit $A = PDP^{-1}$, ce qui prouve la relation au rang 1. Supposons là au rang n, alors $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$. La formule est également vraie au rang 0 puisque $PD^0P^{-1} = I = A^0$.

5. On peut facilement écrire $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2^n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En notant E', F' et G' les trois matrices apparaissant dans l'égalité précédente, on aura $A = P\left(E' + \frac{1}{2^n}F' + \frac{1}{3^n}G'\right)P^{-1} = E + \frac{1}{2^n}F + \frac{1}{3^n}G$, en posant $E = PE'P^{-1}$, et similairement pour F et G. Il va bien falloir se décider à calculer P^{-1}, par exemple en inversant le système défini par la matrice P : $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & a \\ x & & & - & z & = & b \\ x & + & y & + & z & = & c \end{array}\right.$. En soustrayant les équations extrêmes, on trouve tout de suite $z = c - a$, puis à l'aide de la deuxième équation $x = -a + b + c$, et via la première $y = 2a - b - c$, soit $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à calculer $E = PE'P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (calcul vraiment facile ici).

6. Calculons donc (pour changer) : $DL' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}p & \frac{1}{2}q \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}r \end{pmatrix}$, donc $L' = DL' + B$ se traduit par le système de trois équations $\left\{\begin{array}{ccccc} p & = & \frac{1}{2}p & + & 1 \\ q & = & \frac{1}{2}q & - & 1 \\ r & = & \frac{1}{3}r & + & 1 \end{array}\right.$. Même pas de vrai système à résoudre, on trouve simplement $p = 2$, $q = -2$ et $r = \frac{3}{2}$, soit $L' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

7. Calculons donc $AL + B = APL'P^{-1} + B = PDP^{-1}PL'P^{-1} + PB'P^{-1} = P(DL' + B')P^{-1} = PL'P^{-1} = L$.

8. On constate très facilement que $E'L' = 0$ (non, je n'écris pas le calcul !), donc $EL = PE'P^{-1}PL'P^{-1} = P(E'L')P^{-1} = 0$.

9. D'après la question préliminaire, $U_n = L + A^n(U_0 - L)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$, les coefficients de la matrice A^n convergent vers ceux de la matrice E, et ceux de U_n tendent donc vers ceux de $L + E(U_0 - L) = L + EU_0$ vu le résultat de la question précédente.