AP n° 12

PTSI B Lycée Eiffel

29 mai 2020

Problème

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ étant données, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.
On définit la suite de matrices (U_n) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante : $U_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = L + A^n(U_0 - L)$.

   Dans la suite de l'exercice on pose $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   On note par ailleurs :
   - id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
   - a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.
   - b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est B.
2. (a) Prouver que le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à l'image de b si et seulement si $-x + y + z = 0$, puis prouver que $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Im}(id - a)$.

   (b) Déterminer une base de $\ker(a - id)$.

   (c) Montrer que la famille constituée des vecteurs $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (0, -1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, qu'on notera $\mathcal{B}$ dans la suite de l'exercice.

   (d) Écrire la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$.
3. Écrire la matrice D de l'endomorphisme a ainsi que la matrice B' de l'endomorphisme b dans la base $\mathcal{B}$.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En écrivant D^n comme la somme de trois matrices diagonales judicieusement choisies, prouver l'existence de trois matrices E, F, G indépendantes de n telles que pour tout entier naturel n, $A^n = E + \dfrac{1}{2^n}F + \dfrac{1}{3^n}G$. Expliciter la matrice E (mais pas les autres) sous forme de tableau de nombres.
6. Déterminer par le calcul, une matrice L' de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ telle que $L' = DL' + B'$.
7. Montrer que la matrice $L = PL'P^{-1}$ vérifie $L = AL + B$ (on peut faire cette question sans avoir répondu à la précédente).
8. Établir que $EL = 0$.
9. Montrer que chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $EU_0 + L$.