AP n$^{\text{o}}$ 11 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

15 mail 2020

Exercice 1

1. Il faudra bien sûr commencer à $n = 2$ pour la suite (v_n) qui n'est pas définie lorsque $n = 1$. On calule donc :
   - $u_1 = \frac{3}{2}\ln(2) - 1$, donc $S_1 = u_1 = \frac{3}{2}\ln(2) - 1$ et $v_2 = e^{1-S_1} = e^{2-\frac{3}{2}\ln(2)} = \frac{e^2}{2^{\frac{3}{2}\ln(2)}} = \frac{e^2}{2^{\frac{3}{2}}} = \frac{e^2}{2\sqrt{2}}$.
   - $u_2 = \frac{5}{2}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1$, donc $S_2 = u_1 + u_2 = \frac{3}{2}\ln(2) - 1 + \frac{5}{2}\ln(3) - \frac{5}{2}\ln(2) - 1 = \frac{5}{2}\ln(3) - \ln(2) - 2$, et enfin $v_3 = e^{1-S_2} = e^{3+\ln(2)-\frac{5}{2}\ln(3)} = \frac{2e^3}{3^{\frac{5}{2}}} = \frac{2e^3}{9\sqrt{3}}$.
   - $u_3 = \frac{7}{2}\ln\left(\frac{4}{3}\right) - 1$, donc $S_3 = S_2 + u_3 = \frac{5}{2}\ln(3) - \ln(2) - 2 + \frac{7}{2}\ln(4) - \frac{7}{2}\ln(3) - 1 = 6\ln(2) - \ln(3) - 3$, et $v_4 = e^{1-S_3} = e^{4+\ln(3)-6\ln(2)} = \frac{3e^4}{64}$.
2. Il faut être soigneux et recourir à un développement limité pour calculer cet équivalent (sinon, on va certainement écrire des horreurs du style addition d'équivalents). Pour obtenir quelque chose d'intéressant, il faut ici pousser le développement limité de $\ln(1 + u)$ à l'ordre 3, en posant bien sûr $u = \frac{1}{n}$, variable qui tend bien vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On obtient alors $u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} - 1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On a perdu un ordre dans notre développement quand on a multiplié par n, mais ce qu'on a trouvé est suffisant pour affirmer que $u_n \sim \frac{1}{12n^2}$, qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. La série (S_n) converge donc également. Autrement dit, (S_n) a une limite finie a, et la suite (v_n) converge donc vers $l = e^{1-a}$, un réel strictement positif.
3. Une possibilité est de profiter du fait qu'on nous a fourni la formule et de procéder par récurrence. En notant P_n la propriété : $S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n + 1) - n - \ln(n!)$, on doit vérifier au rang 1 que $\frac{3}{2}\ln(2) - 1 - \ln(1) = S_1$, ce qui est le cas. Supposons désormais la formule vérifiée au rang n, alors $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n+1) - n - \ln(n!) + \left(n + \frac{3}{2}\right)\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - 1 = \left(n + \frac{3}{2}\right)\ln(n + 2) - \ln(n + 1) - (n + 1) - \ln(n!) = \left(n + \frac{3}{2}\right) - (n + 1) - \ln((n + 1)!)$, ce qui prouve P_{n+1}. La propriété est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

   Pour les courageux, on peut aussi faire un calcul direct : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(k + \frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) -$

$1 = \sum_{k=1}^{n} k\ln(k+1) + \frac{1}{2}\ln(k+1) - k\ln(k) - \frac{1}{2}\ln(k) - 1$. On effectue un décalage d'indice sur les deux premiers termes de la somme : $S_n = \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)\ln(k) + \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2}\ln(k) - \sum_{k=1}^{n} k\ln(k) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\ln(k) - n = (n+1)\ln(n+1) - \sum_{k=2}^{n+1}\ln(k) + \frac{1}{2}\ln(n+1) - n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) - n - \ln(n!)$, en remarquant que $\sum_{k=2}^{n}\ln(k) = \ln\left(\prod_{k=2}^{n} k\right) = \ln(n!)$.

4. D'après la question précédente, $S_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + 1 - \ln((n-1)!)$, donc $v_n = e^{1-S_{n-1}} = e^{n+\ln((n-1)!)-(n+\frac{1}{2})\ln(n)} = \frac{e^n \times (n-1)!}{n^{n-\frac{1}{2}}} = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ (en multipliant numérateur et dénominateur par n).
5. Puisqu'on sait que (v_n) admet une limite l strictement positive, on peut écrire $v_n \sim l$, soit $\frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}} \sim l$, ce qui revient à dire que $n! \sim l\sqrt{n}n^n e^{-n}$.

Exercice 2

1. (a) On s'intéresse donc au numéro de la case atteinte après trois déplacements. Vu les règles imposées (à chaque étape, on avance d'une case ou on retourne à 0), on a manifestement $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Les probabilités se calculent assez facilement :
   - on ne peut atteindre la case 3 qu'en avançant trois fois de suite avec probabilité $\frac{1}{3}$ à chaque fois, donc $P(X_3 = 3) = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$.
   - pour atteindre la case 2, il faut faire du surplace au premier déplacement et avancer aux deux suivants, donc $P(X_3 = 2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$.
   - on sera sur la case 0 après trois déplacements si et seulement si on est revenu à 0 lors du dernier déplacement (ce qui s'est produit avant n'a aucune importance), donc $P(X_3 = 0) = \frac{2}{3}$.
   - par passage au complémentaire, $P(X_3 = 1) = 1 - \frac{3}{27} - \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$ (valeur qu'on peut aussi calculer directement).

   On peut résumer la loi de X_3 dans le superbe tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X_3 = k)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$

   (b) Calculons donc : $E(X_3) = \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{1}{9} = \frac{13}{27}$. On va bien sûr appliquer la formule de König-Huygens pour la variance : $E(X_3^2) = \frac{2}{9} + \frac{8}{27} + \frac{1}{3} = \frac{23}{27}$, puis $V(X) = \frac{23}{27} - \frac{13^2}{27^2} = \frac{621-169}{27^2} = \frac{452}{729}$ (ce qui ne se simplifie pas le moins du monde).

   (c) Supposons donc l'événement $X_1 = 1$ réalisé. Pour que $X_3 = 1$ soit réalisé, il faut absolument qu'aux deuxième et troisième déplacements, l'objet retourne à l'origine, puis avance d'une case. Autrement dit, $P_{X_1=1}(X_3 = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. Cette probabilité étant bel et bien égale à $P(X_3 = 1)$, les événements sont indépendants. C'est inattendu dans la mesure où on s'attendrait à ce que la position après trois déplacement dépende fortement de ce qui s'est passé avant.

2. (a) Ça semble évident, mais pour le prouver rigoureusement, rien de tel qu'une bonne récurrence. On a évidemment $X_0(\Omega) = \{0\}$. Ensuite, si on suppose $X_n(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$, le mobile peut avancer d'une case à partir de n'importe quelle case où il se trouve, donc se trouver sur une des cases $1, 2, \dots, n+1$; ou revenir à la case 0, ce qui donne bien $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1, \dots, n+1\}$.

   (b) Le système $(X_{n-1} = 0, X_{n-1} = 1, \dots, X_{n-1} = n-1)$ forme un système complet d'événements au vu de la question précédente, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales pour obtenir $P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{k=n-1} P(X_{n-1} = k) \times P_{X_{n-1}=k}(X_n = 0)$. Or, toutes les probabilités conditionnelles sont égales à $\frac{2}{3}$ au vu de l'énoncé, donc $P(X_n = 0) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{k=n-1} P(X_{n-1} = k)$. Cette dernière somme valant 1 (c'est la somme des probabilités correspondant à la variable aléatoire X_{n-1}), on a donc $P(X_n = 0) = \frac{2}{3}$. Évidemment, on peut aussi se contenter de dire que l'événement $X_n = 0$ se produit si et seulement si on retourne à la case 0 lors du dernier déplacement, ce qui a toujours pour probabilité $\frac{2}{3}$.

   (c) On peut utiliser à nouveau la formule des probabilités totales (toutes les probabilités conditionnelles sont nulles sauf une), ou plus simplement signaler que, pour avoir $X_n = k$ avec $k \neq 0$, on doit avoir $X_{n-1} = k-1$ et avancer d'une case, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{3}$.

   (d) Pour éviter une récurrence (forte qui plus est), utilisons une rédaction moins rigoureuse : $P(X_n = k) = \frac{1}{3} P(X_{n-1} = k-1) = \frac{1}{3^2} P(X_{n-2} = k-2) = \cdots = \frac{1}{3^k} P(X_{n-k} = 0) = \frac{1}{3^k} \times \frac{2}{3}$ (autrement dit, pour se trouver à la case k après n déplacements, il est nécessaire et suffisant d'être revenu à la case 0 au déplacement numéro $n-k$, puis d'avoir avancé k fois de suite). Cette formule est d'ailleurs également valable lorsque $k = 0$. De même, on obtient simplement $P(X_n = n) = \frac{1}{3^n} P(X_0 = 0) = \frac{1}{3^n}$ (puisque l'événement $X_0 = 0$ est certain, contrairement à $X_{n-k} = 0$ quand $k < n$). Ce dernier résultat est logique : pour se retrouver sur la case n après n instants, il faut à chaque fois avancer d'une case (et donc ne jamais revenir à la case 0), ce qui se produit à chaque instant avec probabilité $\frac{1}{3}$.

   (e) Calculons donc $\sum_{k=0}^{k=n} P(X_n = k) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{1}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^n} = 1$.

3. (a) Calculons donc en développant et en télescopant : $(1-p)^2 \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} - 2\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)p^k - 2\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + \sum_{k=2}^{n} (k-1)p^k = \sum_{k=0}^{n-2} p^k + \sum_{k=0}^{n-2} kp^k - 2\sum_{k=1}^{n-1} kp^k + \sum_{k=2}^{n} kp^k - \sum_{k=2}^{n} p^k = 1 + p - p^{n-1} - p^n + p - 2p - 2(n-1)p^{n-1} + (n-1)p^{n-1} + np^n = 1 - np^{n-1} + (n-1)p^n$. Ce calcul donne en fait une autre méthode que celle vue en cours pour calculer la somme partielle des séries géométriques dérivées.

   (b) On sait que $E(X_n) = \sum_{k=1}^{k=n} kP(X_n = k) = \frac{2}{9} \sum_{k=1}^{n-1} k \times \frac{1}{3^{k-1}} + \frac{n}{3^n}$. En appliquant le résultat précédent à $p = \frac{1}{3}$, on a $\frac{4}{9} \sum_{k=1}^{n-1} k \times \frac{1}{3^{k-1}} = 1 - \frac{n}{3^{n-1}} + \frac{n-1}{3^n}$, donc $E(X_n) =$

$\frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{3^{n-1}}+\frac{n-1}{3^n}\right)+\frac{n}{3^n}=\frac{1}{2}+\frac{n-1-3n+2n}{2\times 3^n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\times 3^n}$.

4. (a) En effet, en développant, $E(X_{n+1}^2)=\sum_{k=1}^{n+1}k^2P(X_{n+1}=k)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n+1}k^2P(X_n=k-1)=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2P(X_n=k)=\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}k^2P(X_n=k)+2\sum_{k=0}^{n}kP(X_n=k)+\sum_{k=0}^{n}P(X_n=k)\right)$. On reconnait dans la première sonmme $E(X_n^2)$, dans la deuxième $E(X_n)$, et la dernière vaut 1 (somme des probabilités de la variable X_n), d'où la formule.

   (b) Allons-y : $u_{n+1}=E(X_{n+1}^2)+\frac{1}{2}\times\frac{2n+1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}(E(X_n^2)+2E(X_n)+1)+\frac{1}{2}\times\frac{2n+1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}E(X_n^2)+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2\times 3^n}+\frac{1}{3}+\frac{n}{3^{n+1}}+\frac{1}{2\times 3^{n+1}}=\frac{1}{3}E(X_n^2)+\frac{2}{3}-\frac{1}{\times 3^{n+1}}+\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}E(X_n^2)+\frac{2}{3}+\frac{2n-1}{2\times 3\times 3^n}=\frac{1}{3}\left(E(X_n^2)+\frac{2n-1}{2\times 3^n}\right)+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}u_n+\frac{2}{3}$.

   (c) La suite (u_n) est donc arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$, qui donne $x=1$. On pose donc $v_n=u_n-1$, et on a $v_{n+1}=u_{n+1}-1=\frac{1}{3}u_n+\frac{2}{3}-1=\frac{1}{3}(u_n-1)=\frac{1}{3}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique, de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=u_0-1=E(X_0^2)+\frac{1}{2}\times\frac{-1}{3^0}-1=0-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}$. On en conclut que $v_n=-\frac{3}{2}\times\frac{1}{3^n}=-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$, puis $u_n=v_n+1=1-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$. Ne reste plus qu'à en déduire que $E(X_n^2)=u_n-\frac{2n-1}{2\times 3^n}=1+\frac{1-2n-3}{2\times 3^n}=1-\frac{n+1}{3^n}$.

   (d) On peut enfin, pour terminer, appliquer la formule de König-Huygens, qui donne $V(X_n)=E(X_n^2)-(E(X_n))^2=1-\frac{n+1}{3^n}-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)^2=\frac{3}{4}-\frac{2n+1}{2\times 3^n}-\frac{1}{4\times 3^{2n}}$.

5. (a) C'est la somme des numéros de cases sur lesquelles l'objet est passé lors des n premiers déplacements.

   (b) Comme dans le cas de X_3 en début d'exercice, on peut faire les choses sans trop de difficultés :
   - si on avance tout le temps, on obtiendra $S_3=6$ avec probabilité $\frac{1}{27}$.
   - on ne peut pas avoir $S_3=5$ ou $S_3=4$, par contre on aura $S_3=3$ si on atteint la case 2 au troisième déplacement (après avoit fait du surplace au premier déplacement), ou si on commence par faire deux pas en avant avant de retourner à 0. Autrement dit, $P(S_3=3)=2\times\frac{2}{27}=\frac{4}{27}$.
   - une seule possibilité pour avoir $S_3=2$, il faut avancer sur la case 1, revenir à 0 et avancer à nouveau, donc $P(S_3=2)=\frac{2}{27}$.
   - pour avoir $S_3=1$, il faut avancer d'une case à l'un des trois déplacements (peu importe lequel) et revenir à 0 les deux autres fois, donc $P(S_3=1)=3\times\frac{4}{27}=\frac{12}{27}$.
   - enfin, on peut avoir $S_3=0$ si on reste tout le temps à la case 0, ce qui se produit avec probabilité $\frac{8}{27}$.

   Allez, un joli tableau pour résumer (sans simplifier la seule fraction simplifiable, ça ne sert à rien) :

k	0	1	2	3	6
$P(X_3=k)$	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{1}{27}$

On calcule ensuite $E(S_3) = \dfrac{12+4+12+6}{27} = \dfrac{34}{27}$, puis $E(S_3^2) = \dfrac{12+8+36+36}{27} = \dfrac{92}{27}$ et enfin $V(S_3) = \dfrac{92}{27} - \dfrac{34^2}{27^2} = \dfrac{2484-1156}{729} = \dfrac{1328}{729}$ (qui ne se simplifie toujours pas).

(c) On peut bien sûr utiliser la linéarité de l'espérance : $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} E(X_k) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} 1 - \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}\left(n+1-\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{n+1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4\times 3^n} = \frac{n}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4\times 3^n}$.