AP n° 11

PTSI B Lycée Eiffel

15 mail 2020

Exercice 1

Dans cet exercice, on pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$, puis $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et enfin $v_n = e^{1-S_{n-1}}$.

1. Calculer les trois premiers termes de chaque suite.
2. Déterminer un équivalent simple de u_n, et en déduire la convergence de la série (S_n). Que peut-on dire de la suite (v_n) ?
3. Montrer que $S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n+1) - n - \ln(n!)$.
4. En déduire une expression de (v_n) en fonction de n.
5. Conclure que $n! \sim l \times n^n e^{-n} \sqrt{n}$, où l est une constante strictement positive qu'on ne cherchera pas à déterminer.

Exercice 2

Un objet se déplace sur un axe constitué d'une suite (infinie) de cases numérotées 0, 1, 2, ...
L'objet est initialement positionné sur la case 0 et se déplace selon la règle suivante : s'il est sur la case numéro k à l'instant n, alors, à l'instant $n+1$, il avancera sur la case $k+1$ avec la probabilité $\frac{1}{3}$, ou reviendra à la case 0 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case sur laquelle se trouve l'objet à l'instant n.

1. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 3$.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_3 (on commencera bien entendu par préciser $X_3(\Omega)$).
   (b) Calculer $E(X_3)$ et $V(X_3)$.
   (c) Calculer la probabilité $P_{X_1=1}(X_3 = 1)$. Les événements $X_1 = 1$ et $X_3 = 1$ sont-ils indépendants ? Ce résultat est-il surprenant ?
2. On revient au cas général.
   (a) Déterminer $X_n(\Omega)$ en justifiant rigoureusement votre réponse.
   (b) Démontrer tout aussi rigoureusement que, $\forall n \geqslant 1$, $P(X_n = 0) = \frac{2}{3}$.
   (c) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, $P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{3} P(X_n = k-1)$.
   (d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall k \in \{0, 1, 2 \dots, n-1\}$, $P(X_n = k) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3^k}$. En déduire également la valeur de $P(X_n = n)$. Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

(e) Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) = 1$.

3. On cherche désormais à calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n.

   (a) Calculer (et simplifier) $(1-p)^2 \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1}$, où $p \in \mathbb{R}$.

   (b) En déduire que $E(X_n) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$.

4. Après l'espérance, la variance !

   (a) Montrer, en utilisant la question 2.c, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}^2) = \frac{1}{3}(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1)$.

   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = E(X_n^2) + \frac{1}{2} \times \frac{2n-1}{3^n}$.

   Montrer que $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}$.

   (c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $E(X_n^2)$ en fonction n.

   (d) Calculer enfin $V(X_n)$ (on ne cherchera pas à simplifier l'expression obtenue).

5. On définit pour cette dernière question une nouvelle variable aléatoire $S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k$.

   (a) Que représente la variable aléatoire S_n ?

   (b) Donner la loi et calculer l'espérance et la variance de la variable S_3.

   (c) En utilisant les résultats des questions précédentes, calculer l'espérance de la variable aléatoire S_n.