AP n° 10 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 avril 2020

Exercice 1

1. La linéarité ne pose guère de problème : si P et Q sont deux polynômes (peu importe leur degré ici) et λ un réel, alors $f(\lambda P+\mu Q)=\dfrac{X^2-1}{2}(\lambda P+\mu Q)''-X(\lambda P+\mu Q)'+\lambda P+\mu Q=\lambda\dfrac{X^2-1}{2}P''+\mu\dfrac{X^2-1}{2}Q''-\lambda XP'-\mu XQ'+\lambda P+\mu Q=\lambda f(P)+\mu f(Q)$, ce qui prouve la linéarité. De plus, si $d^\circ(P)\leqslant 3$, alors $d^\circ(P')\leqslant 2$ et $d^\circ(P'')\leqslant 1$, chacun des trois termes intervenant dans la définition de $f(P)$ est alors de degré inférieur ou égal à 3, et leur somme appartient donc à $\mathbb{R}_3[X]$, ce qui prouve que notre application linéaire est un endomorphisme de cet espace vectoriel.
2. On calcule l'image en commençant par calculer les images des polynômes de la base canonique de E. Pour cela, il peut être plus simple de calculer explicitement $f(P)$ en fonction des coefficients de P pour un polynôme quelconque. Posons donc $P=aX^3+bX^2+cX+d$, alors $P'=3aX^2+2bX+c$ et $P''=6aX+2b$. On peut donc calculer $f(P)=\dfrac{X^2-1}{2}(6aX+2b)-X(3aX^2+2bX+c)+aX^3+bX^2+cX+d=3aX^3+bX^2-3aX-b-3aX^3-2bX^2-cX+aX^3+bX^2+cX+d=aX^3-3aX+d-b$. En particulier, on a donc $f(X^3)=X^3-3X$; $f(X^2)=-1$; $f(X)=0$ et $f(1)=1$. On en déduit immédiatement que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(X^3-3X,1)$ (inutile de garder l'image égale à -1, qui est bien sûr opposée à celle égale à 1). En particulier, cette image est de dimension 2 (et le noyau le sera donc également, par application du théorème du rang). Concernant justement le noyau, on repart également de $f(P)=aX^3-3aX+d-b$. Ce polynôme est nul si $a=0$ et $b=d$, donc $P=bX^2+cX-b$. Autrement dit, $\ker(f)=\mathrm{Vect}(X^2+1,X)$. Le noyau de f est donc comme prévu de dimension 2. On peut par ailleurs remarquer que, si on regroupe les deux bases obtenues pour le noyau et l'image, on obtient une famille $(X^3-3X,X^2+1,X,1)$ qui est une famille échelonnée de polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$. NOtre cours nous permet alors d'affirmer qu'il s'agit d'une base de E, ce qui suffit à prouver la supplémentarité dans E de nos deux sous-espaces.
3. En notant s la symétrie par rapport à $\ker(f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(f)$, on a $s=id-2f$ (attention, c'est bien l'opposé de la formule vue en cours puisqu'on a échangé ici le rôle du noyau et de l'image). On peut donc écrire que $s(P)=P-2f(P)=P-(X^2-1)P''+2XP'-2P=(1-X^2)P''+2XP'-P$.

Exercice 2

1. Pour déterminer le noyau de f, on résout le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ -2x & - & 2y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$ L'opération L_1+L_2 donne $x+y=0$, donc $x=-y$. De même, l'opération L_2+L_3 donne $y+z=0$ donc $z=-y$. En remplaçant alors x et z par $-y$ dans L_1 (ou n'importe quelle équation en fait), l'équation devient $y=0$, donc on déduit $x=z=0$. Autrement dit, $\ker(f)=\{0\}$, ce qui prouve que f est une application injective. Mais comme de plus f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, f est en fait bijective, c'est un automorphisme.

2. Pour déterminer le noyau de $f - id$, on résout le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & - & 2y & - & 2z & = & x \\ 2x & + & 3y & + & 2z & = & y \\ -2x & - & 2y & - & z & = z & \end{array}\right.$.
Les trois équations sont équivalentes à $x+y+z = 0$, ce qui donne $\ker(f-id) = \text{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$. En particulier, ce premier noyau est de dimension 2. De même, le noyau de $f+id$ se détermine en résolvant $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & -2y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 4y & + & 2z & = & 0 \\ -2x & - & 2y & & & = 0 & \end{array}\right.$. On a donc $z = -y$ (première équation) et $x = -y$ (dernière équation) et la deuxième équation est alors automatiquement vérifiée, donc $\ker(f+id) = \text{Vect}((-1,1,-1))$, en particulier ce deuxième noyau est de dimension 1. Les deux sous-espaces obtenus ont des dimensions dont la somme est égale à 3, et le vecteur $(-1,1,-1)$ ne vérifie pas l'équation $x+y+z = 0$, ce qui suffit à prouver que leur intersection est réduite au vecteur nul. Ces deux espaces sont donc bien supplémentaires.
3. Les questions précédentes laissent supposer que f est une symétrie. Une méthode bizarre permettant d'éviter de calculer explicitement $f \circ f$: on note $u = (1,0,-1)$, $v = (0,1,-1)$ et $w = (-1,1,-1)$ (autrement dit, les vecteurs obtenus pour les bases de nos deux noyaux à la question précédente). Par définition $f(u) = u$, donc $f^2(u) = f(u) = u$, et de même $f^2(v) = v$. Toujours par construction, $f(w) = -w$, donc $f^2(w) = f(-w) = -f(w) = w$. L'application linéaire f^2 coïncide donc avec l'identité sur les trois vecteurs u, v et w. Mais comme ceux-ci forment une base de $\mathbb{R}^3$ (à cause de la supplémentarité prouvée à la question précédente), cela suffit à prouver que $f^2 = id$ (pour ceux qui ne sont pas convaincus : tout vecteur $e \in \mathbb{R}^3$ peut s'écrire sous la forme $e = au+bv+cw$, et par linéarité de f^2, on aura alors $f^2(e) = f^2(au+bv+cw) = af^2(u)+bf^2(v)+cf^2(w) = au+bv+cw = e$). L'application f est donc une symétrie, et même plus précisément la symétrie par rapport à F parallèlement à G. La projection p dont on demande l'expression vérifie alors $f = 2p - id$, donc $p = \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}id$. On a donc directement $p(x,y,z) = \frac{1}{2}(f(x,y,z) + (x,y,z)) = (-y-z, x+2y+z, -x-y)$.

Exercice 3

1. Puisque le premier tirage s'effectue dans U_1, $u_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Ensuite il faut utiliser la formule des probabilités totales pour obtenir rigoureusement les probabilités : les événements B_1 et $\overline{B_1}$ forment un système complet d'événements, et $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}$ (on tire alors dans l'urne U_1), et $P_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{1}{4}$ (on tire alors dans l'urne U_2). On applique donc la formule : $P(B_2) = P_{B_1}(B_2) \times P(B_1) + P_{\overline{B_1}}(B_2) \times P(\overline{B_1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$. On effectue exactement le même raisonnement pour la troisième probabilité (les probabilités conditionnelles sont exactement les mêmes) : $P(B_3) = P_{B_2}(B_3) \times P(B_2) + P_{\overline{B_2}}(B_3) \times P(\overline{B_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{11}{32}$.
2. C'est à nouveau le même principe, avec les même probabilités conditionnelles : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}(1-u_n)$ (en utilisant bien entendu que $P(\overline{B_n}) = 1 - P(B_n) = 1 - u_n$), soit $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}$.
3. La suite (u_n) est arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$, qui a pour solution $x = \frac{1}{3}$. On pose donc $v_n = u_n - \frac{1}{3}$ et on constate que $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. On en déduit que $v_n = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1}{3 \times 2^{2n-1}}$, puis $u_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2^{2n-1}}\right)$. Cette suite a bien sûr pour limite $\frac{1}{3}$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui est

plus ou moins logique (c'est entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$, ce qui parait vaguement cohérent puisqu'on va tirer alternativement dans les deux urnes).

4. La variable X_1 prend les valeurs 0 et 1, avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacune. Elle a donc une espérance égale à $\frac{1}{2}$. On a ensuite bien entendu $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Pour avoir $X_2 = 0$, on doit tirer deux boules noires aux deux premiers tirages, donc $P(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ (on tirera dans ce cas dans l'urne U_2 pour le deuxième tirage). Au contraire, pour avoir $X_2 = 2$, il faut tirer deux boules blanches, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Il reste donc $P(X_2 = 1) = \frac{3}{8}$, ce qu'on peut vérifier directement : on tire une boule blanche puis une noire avec probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, et une noire puis une blanche avec probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, ce qui donne bien une somme égale à $\frac{3}{8}$. On calcule ensuite aisément $E(X_2) = \frac{3}{8} + \frac{2}{4} = \frac{7}{8}$. Enfin, on aura bien sûr $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. L'événement $X_3 = 3$ est réalisé si on tire successivemen trois boules blanches, donc $P(X_3 = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ (on tirera toujours dans l'urne U_1). De même, il faut tirer trois boules noires pour avoir $X_3 = 0$, donc $P(X_3 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$. Les deux dernières probabilités ne se calculent pas facilement : par exemple $X_3 = 1$ est réalisé si on tire succesivement une blanche puis deux noires, ou deux noires puis une blanche, ou une blanche entre deux noires, ce qui donne $P(X_3 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16} + \frac{3}{32} + \frac{1}{16} = \frac{11}{32}$. On en déduit par passage au complémentaire que $P(X_3 = 2) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. En particulier, on aura donc $E(X_3) = \frac{11}{32} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} = \frac{39}{32}$.

5. Le plus simple pour cette question, et de loin, est de noter Y_i la variable aléatoire indicatrice de l'événement B_i (donc celle qui vaut 1 quand B_i est réalisé et 0 sinon). Par définition, $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ (puisque, en additionnant 1 à chaque fois qu'on tire une boule blanche et 0 sinon, on va bien obtenir le nombre de boules blanches tirées), donc, par linéarité de l'espérance, $E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i)$. Or, l'espérance d'une variable aléatoire indicatrice n'est autre que la probabilité de l'événement correspond, qu'on connait ici très bien pour l'avoir calculée plus haut, donc $E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2 \times 4^{i-1}}\right) = \frac{n}{3} + \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{4^i}$ (on a effectué un petit changement d'indice dans la deuxième partie de la somme, il ne reste plus qu'à appliquer le cours sur les sommes géométriques), soit $E(X_n) = \frac{n}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{n}{3} + \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$. Lorsque $n = 3$, on retrouve $E(X_3) = 1 + \frac{2}{9} \times \frac{63}{64} = 1 + \frac{7}{32} = \frac{39}{32}$.