

AP n° 10

PTSI B Lycée Eiffel

13 avril 2020

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on considère l'application f définie sur E par $f(P) = \frac{X^2 - 1}{2}P'' - XP' + P$.

1. Montrer rigoureusement que f est un endomorphisme de E .
2. Déterminer une base du noyau et de l'image de f , et vérifier que ceux-ci sont supplémentaires dans E .
3. Montrer que f est un projecteur.
4. Donner l'expression de la symétrie par rapport à $\ker(f)$ parallèlement à $\text{Im}(f)$.

Exercice 2

On considère l'application définie dans \mathbb{R}^3 par $f(x, y, z) = (-x - 2y - 2z, 2x + 3y + 2z, -2x - 2y - z)$.

1. Déterminer le noyau de f . Que peut-on en déduire ?
2. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels $F = \ker(f - id)$ et $G = \ker(f + id)$. Montrer qu'ils sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
3. Reconnaître l'application f , et en déduire l'expression de la projection sur F parallèlement à G .

Exercice 3

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 dans lesquelles on effectue des tirages avec remise. L'urne U_1 contient deux boules blanches et deux boules noires, l'urne U_2 contient une boule blanche et trois boules noires. De plus les tirages s'effectuent de la façon suivante :

- le premier tirage s'effectue nécessairement dans U_1
- si on obtient une boule blanche au tirage n , on effectuera le tirage suivant dans U_1 , sinon il se fera dans U_2 .

On notera B_n l'événement « on tire une boule blanche au tirage n » et u_n sa probabilité.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n .
3. En déduire la valeur de u_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$. Ce résultat vous semble-t-il logique ?
4. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches tirées lors des n premiers tirages. Déterminer la loi, l'espérance et la variance des variables X_1 , X_2 et X_3 .
5. Calculer plus généralement $E(X_n)$ (sans chercher à déterminer la loi complète de la variable).