

## Feuille d'exercices n°20 : séries

PTSI B Lycée Eiffel

29 mai 2017

### Exercice 1 (\* à \*\*\*)

Étudier la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes (distinguer selon la valeur de  $x$  pour les séries faisant intervenir un  $x$ ). On a le droit d'utiliser la formule vue en exercice pour les séries géométriques dérivées :

$$\begin{array}{lll} \bullet \sum \frac{n-1}{3^n} & \bullet \sum \frac{n(n-1)x^n}{n!} & \bullet \sum \frac{2n^2}{n^3-1} \\ \bullet \sum \frac{1}{2^{2n+1}} & \bullet \sum \frac{4(-1)^n}{n!} & \bullet \sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \\ \bullet \sum \frac{3+n2^n}{4^{n+2}} & \bullet \sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) & \bullet \sum \frac{1}{4n^2-1} \\ \bullet \sum \frac{\text{ch}(n)}{3^n} & \bullet \sum \frac{5}{(2n+1)(2n+3)} & \bullet \sum \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \\ \bullet \sum e^{-nx} & \bullet \sum \frac{1}{F_n} \text{ (} F_n \text{ étant le terme d'indice } n \text{ de la suite de Fibonacci)} & \end{array}$$

### Exercice 2 (\*\*)

Soit  $u_n$  une suite définie par  $u_0 > 0$  et  $\forall n \geq 1, u_{n+1} = e^{-u_n} u_n$ .

1. Montrer que la suite  $u_n$  est convergente et préciser sa limite.
2. En posant  $v_n = \ln u_n$ , calculer la somme partielle de la série de terme général  $u_n$  en fonction de  $v_0$  et de  $v_{n+1}$ .
3. En déduire la nature de  $\sum u_n$ .

### Exercice 3 (\*)

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, déterminer un équivalent simple du reste d'indice  $n$  de la série de terme général  $\frac{1}{n^2}$ . Si on est courageux, on généralisera pour la série de terme général  $\frac{1}{n^k}$ .

### Exercice 4 (\*\*\*)

On considère une suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in [0; 1]$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$ .

1. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.

- Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n^2$  et sa somme éventuelle.
- Prouver que la série de terme général  $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  est divergente.
- En déduire la nature de la série  $\sum u_n$ .

### Exercice 5 (\* à \*\*)

Étudier la nature de chacune des séries suivantes, sans chercher à calculer leur somme :

$$\begin{array}{lll}
 \bullet \sum \frac{1}{n^2 - n} & \bullet \sum \frac{1}{e^n + e^{-n}} & \bullet \sum \frac{1}{n^3 + 2^n} \\
 \bullet \sum \ln \frac{n^2 + n^4}{2n^4} & \bullet \sum \sqrt{\frac{n+2}{n^3 - 5n + 1}} & \bullet \sum \frac{\ln n}{3^n} \\
 \bullet \sum \frac{\ln(1+n)}{\ln(1+3n)} & \bullet \sum \frac{n^2}{n!} & \bullet \sum \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} \\
 \bullet \sum \ln \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2n} & \bullet \sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} & \bullet \sum \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}
 \end{array}$$

Les dernières séries de l'exercice sont connues sous le nom de séries de Bertrand.

### Exercice 6 (\*)

En admettant que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ , calculer  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ .

### Exercice 7 (\*\*)

- Prouver la convergence de la série de terme général  $\arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$ .
- Comparer ce terme général avec  $\arctan(n+1) - \arctan(n)$ .
- En déduire la valeur de la somme de la série étudiée.

### Exercice 8 (\*\*\*)

- Déterminer trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que la série de terme général  $a\sqrt{n-1} + b\sqrt{n} + c\sqrt{n+1}$  soit convergente. Indice : un peu de révision de développements limités ne peut pas vous faire de mal.
- Même question pour la série de terme général  $\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \left(an + b + \frac{c}{n}\right)$  (et même indice!).
- Vous êtes tellement bien partis que vous allez maintenant déterminer la nature de la série de terme général  $\sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$  en fonction du réel  $a$ .

## Problème 1 (\*\*\*)

Dans tout ce problème, on étudie différentes séries ayant une forme proche de celle de la série exponentielle.

### I. Série exponentielle

Le but de cette partie est de prouver la convergence de la série exponentielle et de donner quelques propriétés de sa limite, **sans** utiliser vos connaissances éventuelles sur cette série.

1. Montrer que,  $\forall n \geq 4, n! \geq 2^n$ .
2. En déduire que,  $\forall n \geq 4, \sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^3}$ .
3. Prouver la convergence de la série exponentielle  $\sum \frac{1}{k!}$ , et donner un encadrement de sa limite.

### II. Suites et séries de Cantor

Une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  d'entiers relatifs est appelée suite de Cantor si  $u_1 \in \mathbb{Z}$  et  $\forall n \geq 2, 0 \leq u_n \leq n-1$ . La série de Cantor associée à une telle suite  $(u_n)$  est la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{u_n}{n!}$ . On considère dans cette partie une suite de Cantor  $(u_n)$  et on note  $S_n$  la somme partielle de

la série de Cantor associée :  $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!}$ .

1. Calculer en fonction de  $n$  et  $p$  la somme  $A = \sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{k-1}{k!}$  (on pourra utiliser un télescopage).
2. Montrer que,  $\forall 1 \leq p < n, 0 \leq S_n - S_p \leq A$ .
3. En déduire que la série de Cantor associée à  $(u_n)$  est convergente. On notera  $S$  sa limite.
4. Montrer que,  $\forall p \geq 1, S_p \leq S \leq S_p + \frac{1}{p!}$ .

### III. Développement de Cantor d'un réel

On considère désormais un réel quelconque  $x$  et on note, pour  $n \geq 1, p_n = Ent(n!x)$  (où  $Ent(x)$  désigne la partie entière de  $x$ , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ ). On définit ensuite  $(u_n)$  par  $u_1 = p_1$  et,  $\forall n \geq 2, u_n = p_n - np_{n-1}$ .

1. Montrer que,  $\forall n \geq 1, u_n \in \mathbb{Z}$ .
2. Montrer que,  $\forall n \geq 2, np_{n-1} \leq p_n \leq n!x < p_n + 1 \leq n(p_{n-1} + 1)$ .
3. En déduire que  $(u_n)$  est une suite de Cantor.
4. On note comme précédemment  $S_n$  la somme partielle de la série de Cantor associée à  $(u_n)$  :  $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!}$ . Exprimer  $S_n$  en fonction de  $p_n$ .
5. Prouver que la série converge vers  $x$ .

## Problème 2 (\*\*\*)

On note dans cet exercice  $E$  l'ensemble de toutes les suites  $(p_n)$  croissantes (mais pas forcément strictement) d'entiers naturels telles que  $p_0 \geq 2$ . Pour une suite  $(p_n)$  appartenant à  $E$ , on s'intéresse à la série  $(S_n)$  de terme général  $\frac{1}{p_0 \cdots p_n}$ . Autrement dit,

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\prod_{i=0}^k p_i}.$$

1. Commençons par étudier quelques cas particuliers :
  - (a) Dans le cas où la suite  $(p_n)$  est constante égale à 2, reconnaître la série  $(S_n)$ , et en déduire sa convergence, ainsi que la valeur de sa somme.
  - (b) Généraliser au cas d'une suite  $(p_n)$  constante égale à  $n$ , pour un certain entier naturel  $n \geq 2$ .
  - (c) Supposons désormais que  $p_n = n + 2$ , reconnaître à nouveau la série  $(S_n)$ , et prouver sa convergence vers une somme à déterminer. Vérifier que cette somme appartient à l'intervalle  $]0, 1]$ .
  - (d) En supposant désormais que  $p_n = 2n + 2$ , prouver que le terme général de la série  $(S_n)$  est égal à  $\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$ , en déduire la convergence et la somme de la série  $(S_n)$ . Vérifier à nouveau que la somme appartient à  $]0, 1]$ .
2. Dans le cas général, prouver que la série  $(S_n)$  est toujours convergente, et que sa somme appartient à  $]0, 1]$ . On notera désormais  $S(p)$  la somme de la série associée à la suite  $p = (p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
3. Montrer que l'application  $S : E \rightarrow ]0, 1]$  est une application injective (on pourra commencer par constater que, si  $p_0 > q_0$ , alors  $S(p) < S(q)$ ).
4. Soit  $x$  un réel appartenant à l'intervalle  $]0, 1]$ . On construit à partir de  $x$  la suite  $(y_n)$  de la façon suivante :  $y_0 = x$  et  $\forall n \geq 1$ ,  $y_{n+1} = p_n y_n - 1$ , où  $p_n = \text{Ent} \left( 1 + \frac{1}{y_n} \right)$ .
  - (a) Déterminer les premiers termes des suites  $(y_n)$  et  $(p_n)$  lorsque  $x = \frac{3}{7}$  (calculez jusqu'à ce qu'il se produise quelque chose de remarquable, ce qui devrait arriver vite). Calculer  $S(p)$  pour la suite  $(p_n)$  ainsi obtenue.
  - (b) Dans le cas général, montrer que  $(y_n)$  est une suite décroissante d'éléments de  $]0, 1]$ .
  - (c) En déduire que  $(p_n)$  vérifie toujours les hypothèses posées en début d'exercice.
  - (d) Exprimer  $x$  en fonction de  $p_0, p_1, \dots, p_n$  et  $y_n$ , et en déduire la valeur de  $S(p)$  lorsque  $p = (p_n)$ . Conclure que  $S$  est une application bijective de  $E$  dans  $]0, 1]$ .