Feuille d'exercices n°17 : Probabilités

PTSI B Lycée Eiffel

4 mai 2017

Vrai-Faux

1. Deux événements indépendants sont deux événements qui ne peuvent pas se produire simultanément.
2. Une loi de probabilité vérifie nécessairement $P(\emptyset) = 0$.
3. La probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
4. La formule des probabilités totales peut s'exprimer ainsi : $P(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(A_i \cap B)$.
5. Trois événements A, B et C sont mutuellement indépendants si et seulement si A et B sont indépendants, A et C sont indépendants, et B et C sont indépendants.

Exercice 1 (**)

On lance un dé quatre fois de suite. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient quatre fois le même chiffre.
2. On obtient quatre chiffres différents.
3. On obtient quatre chiffres qui se suivent (en ordre croissant ou décroissant).

Exercice 2 (*)

Dans une urne se trouvent 4 boules noires et deux boules blanches. Cinq personnes tirent successivement (sans remise) une boule dans l'urne. Le premier qui tire une boule blanche a gagné, quelle est la probabilité de gain pour chaque personne ?

Exercice 3 (**)

Dans un petit pays, les numéros de téléphone sont contitués de seulement 6 chiffres. On compose un tel numéro au hasard. Calculer les probabilités suivantes :

1. Le numéro composé commence par 01.
2. Le numéro composé est constitué de 6 chiffres distincts.
3. Le numéro composé contient deux fois le chiffre 5.
4. Le numéro composé ne contient que des chiffres pairs.
5. Le numéro composé a ses six chiffres en ordre strictement croissant.

Exercice 4 (***)

Dans une urne sont placées 15 boules vertes et 10 boules blanches. On tire successivement (sans remise) 5 boules dans l'urne. Calculer les probabilités suivantes :

1. On obtient 5 boules vertes.
2. On obtient une première boule verte, les deux suivantes blanches, les deux dernières vertes.
3. On obtient au plus une boule blanche.
4. On obtient trois boules vertes et deux blanches.

Reprendre l'exercice avec des tirages avec remise.

Exercice 5 (***)

Deux personnes A et B jouent au jeu suivant : A lance un pièce, s'il obtient Pile, il a gagné. Sinon, B lance une pièce, s'il obtient Face il a gagné. Sinon, c'est à nouveau à A de jouer ...On note A_k (respectivement B_k) l'événement : « Le joueur A (respectivement B) gagne à son k-ème lancer ». Calculer la probabilité de A_k et de B_k. On suppose désormais que le jeu s'arrêt après 10 lancers (cinq pour chaque joueur). Calculer la probabilité des événements suivants :

1. Le joueur A gagne en lançant moins de trois fois la pièce.
2. Le jouer B gagne.
3. Personne ne gagne.
4. On suppose que quelqu'un a gagné. Quelle est la probabilité que ce soit A ?

Exercice 6 (***)

On range aléatoirement cinq boules distinguables dans quatre boites également distinguables.

1. Quel est le nombre de rangements différents possibles ?
2. Quelle est la probabilité que toutes les boules soient rangées dans la même boite ?
3. Quelle est la probabilité que deux boites exactement soient vides ?
4. Même question avec une boite vide.
5. En déduire la probabilité qu'aucune boite ne soit vide.
6. Retrouver ce résultat directement à l'aide de la formule de Poincaré.

Exercice 7 (***)

Un tournoi de tennis accueille 64 joueurs, dont 8 sont têtes de séries. Un bug au moment d'effectuer le tirage au sort fait remplir le tableau de façon totalement aléatoire, y compris les têtes de séries.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins deux têtes de série se rencontrent dès le premier tour ?
2. Quelle est la probabilité que les têtes de séries ne puissent pas se rencontrer avant les quarts de finale ?

Exercice 8 (*)

Un classique : une maladie touche un individu sur 100. On dispose d'un test de dépistage qui est positif pour 95% des personnes malades et pour 0.1% des individus sains. Un individu est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ? Reprendre le même exercice en supposant maintenant que la maladie ne touche qu'une personne sur 1 000, et que le test sera positif pour 0.5% des individus sains. Que penser du résultat obtenu ?

Exercice 9 (*)

Une guerre sévit depuis des années entre deux pays voisins. Les habitants du pays A sont à 60% favorables à la paix et à 16% favorables à la guerre (le reste étant sans opinion) ; par contre dans le pays B, 68% des habitants sont pour la guerre et 12% sont pour la paix. On rencontre un individu sans savoir quel pays il habite (une chance sur deux pour chaque).

1. Calculer la probabilité qu'il soit sans opinion.
2. Il est favorable à la guerre, quelle est la probabilité qu'il habite le pays A ?
3. Même question s'il est favorable à la paix.

Exercice 10 (***)

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Dans l'urne numéro k se trouvent k boules blanches et $n-k$ rouges. On choisit au hasard une urne puis on tire deux boules dans cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir deux boules rouges ? Même question si on tire successivement les deux boules avec remise. Quelles sont les limites de ces probabilités quand n tend vers l'infini ?

Exercice 11 (**)

Dans un lot de 10 dés à 6 faces, 2 sont truqués de la façon suivante : la face 6 est tirée la moitié du temps, et les autres faces apparaissent avec la même probabilité. On choisit un dé au hasard et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On obtient un 6. Quelle est la probabilité que le dé soit truqué ?
3. On obtient un 2. Quelle est la probabilité que le dé ne soit pas truqué ?

Exercice 12 (**)

On dipose de deux urnes, la première contenant 6 boules rouges et trois noires, et la deuxième 6 noires et trois rouges. On choisit une urne au hasard, puis on y tire deux boules, on obtient deux rouges. Quelle est la probabilité qu'on ait choisi la première urne ? Même question si on effectue les deux tirages successivement avec remise.

Exercice 13 (**)

Une compagnie aérienne étudie l'évolution des réservations sur l'un de ses vols. Elle constate que l'état d'une place donnée évolue ainsi : elle est libre au jour 0 (jour d'ouverture des réservations), puis, si elle est libre au jour n, il y a une probabilité $\dfrac{4}{10}$ que quelqu'un la réserve au jour $n+1$. Par contre, si elle est réservée au jour n, elle reste réservée au jour $n+1$ avec probabilité $\dfrac{9}{10}$. On note p_n la probabilité que la place soit réservée au jour n. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et en déduire p_n, puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 14 (***)

Une guêpe entre par inadvertance dans un appartement composé de deux pièces A et B. Elle est dans la pièce A à $t=0$, et évolue ainsi : si elle est en A à l'instant n, elle reste en A avec probabilité $\dfrac{1}{3}$ ou passe en B avec probabilité $\dfrac{2}{3}$ à l'instant $n+1$; si elle est en B, elle retourne en A avec probabilité

$\frac{1}{4}$, reste en B avec probabilité $\frac{1}{2}$ et sort de l'appartement avec probabilité $\frac{1}{4}$. Si elle est dehors, elle y reste. On note A_n : « La guêpe est en A à l'instant n ». Je vous laisse deviner ce que représentent B_n et C_n. Les probabilités respectives de ces événements sont notées a_n, b_n et c_n.

1. Calculer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2.
2. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.
3. Montrer que $u_n = \frac{6}{10}a_n - \frac{3}{10}b_n$ est une suite constante.
4. Montrer que $u_n = \frac{4}{10}a_n + \frac{3}{10}b_n$ est une suite géométrique.
5. En déduire les valeurs de a_n et de b_n.
6. Que vaut c_n ?

Exercice 15 (***)

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On pioche une poignée de jetons qui contient un nombre aléatoire de jetons, et on sait qu'il y a équiprobabilité sur le nombre de jetons tirés (qui peut être égal à 0 ; autrement dit, on eut pioche une poignée vide). Quelle est la probabilité de piocher le jeton numéro 1 dans notre poignée ? Les évènements A : « On a pioché le jeton 1 » et B : « On a pioché le jeton 2 » sont-ils indépendants ? Mêmes questions dans le cas où ce n'est plus le nombre de jeton qui est réparti uniformément, mais où on a équiprobabilité sur toutes les poignées possibles (toujours en comptant la poignée vide) ?

Exercice 16 (***)

Un élève de prépa ayant décidé de vraiment s'aérer l'esprit pendant les vacances s'est programmé une semaine de farniente aux îles Berthe, au coeur de l'océan des Mathématiques. Cette destination peu prisée des touristes n'est desservie que par une unique compagnie aérienne, dont la fiabilité laisse malheureusement quelque peu à désirer. Sur les avions de cette compagnie, chaque moteur a une probabilité p (inconnue) de tomber en panne pendant le vol (les différents moteurs ont un comportement indépendant les uns des autres). Tout avion est amené à s'écraser si (au moins) la moitié de ses moteurs tombe en panne pendant le vol.

1. On s'intéresse pour l'instant au cas d'un avion à deux moteurs. Montrer que la probabilité qu'au moins l'un de ses deux moteurs tombe en panne vaut $p(2-p)$.
2. En déduire la probabilité que l'avion à deux moteurs arrive à bon port (on notera A cet événement).
3. On considère désormais un avion à quatre moteurs. En notant M_1 l'événement « Le moteur n°1 tombe en panne » et similairement pour les trois autres moteurs, décrire l'événement B : « L'avion va s'écraser durant le vol » à l'aide des événements M_i.
4. En déduire $P(B)$ (attention à ne pas compter plusieurs fois certains cas).
5. Factoriser $P(A) - P(\overline{B})$, et déterminer son signe en fonction de p.
6. Qu'obtient-t-on lorsque $p = 0$ ou $p = 1$? Expliquer ce résultat d'un point de vue probabiliste.
7. Si notre préparationnaire a le choix entre un avion à deux moteurs et un avion à quatre moteurs, lequel lui conseillez-vous (on pourra distinguer des cas selon la valeur de p) ?
8. Notre préparationnaire ayant finalement renoncé à risquer sa vie pour partir à la plage, il se demande ce que donnerait la comparaison de l'avion à quatre moteurs avec un troisième avion à six moteurs. Pouvez-vous l'aider (il faut vraiment que vous ayez vous-même du temps à perdre) ?