

# Feuille d'exercices n°13 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 mars 2017

## Vrai-Faux

1. Faux, ça ne marche pas si  $a > b$  (oui, je sais, c'est vraiment un piège minable).
2. Vrai, c'est même la propriété permettant de construire l'intégrale des fonctions continues à partir de celle des fonctions en escalier.
3. Faux, il faut même préciser que  $f$  est positive, sinon ça n'a aucune raison de marcher !
4. Vrai, même si dans le poly de cours on l'a simplement prouvé pour un polynôme de degré 2.
5. Faux, c'est  $f^{(n+1)}(t)$  et pas  $f^{(n)}(t)$ .

## Exercice 1 (\*\*)

1. On effectue une intégration par parties en posant  $v'(x) = x^2$  et  $u(x) = \ln x$ , donc  $v(x) = \frac{x^3}{3}$  et  $u'(x) = \frac{1}{x}$ , pour obtenir  $I_1 = \int_1^e x^2 \ln x \, dx = \left[ \frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{e^3}{3} - \left[ \frac{x^3}{9} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}$ .
2. Sur  $[1; e]$ ,  $0 \leq \ln x \leq 1$ , donc  $0 \leq (\ln x)^{n+1} \leq (\ln x)^n$ . En découle  $0 \leq x^2(\ln x)^{n+1} \leq x^2(\ln x)^n$ , puis par intégration  $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$ . La suite  $(I_n)$  est décroissante.
3. La suite est décroissante minorée par 0, elle converge.
4. Le plus simple est d'étudier la fonction  $f : x \mapsto \ln x - \frac{x}{e}$ . On a  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$ , qui est positif sur l'intervalle  $[1; e]$ . La fonction  $f$  est donc croissante sur  $[1; e]$ , et  $f(e) = 0$ , donc  $f$  est négative sur  $[1; e]$ . On en déduit que  $I_n \leq \int_1^e x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{e^n} \int_1^e x^{n+2} \, dx = \frac{1}{e^n(n+3)}$ . La majoration calculée tendant vers 0, le théorème des gendarmes s'applique, et  $(I_n)$  converge vers 0.
5. Il s'agit bien sûr d'une intégration par parties, avec  $u'(x) = x^2$  et  $v(x) = (\ln x)^{n+1}$  :  
$$I_{n+1} = \left[ \frac{x^3}{3} (\ln x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} (n+1) (\ln x)^n = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$$
. En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{3} I_n = \frac{e^3}{3}$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^3 - I_n = e^3$ .

## Exercice 2 (\*\*)

1. Calculons donc :  $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t} \, dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$  ( $\simeq 0.4$ );  $u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2t} \, dt = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+2t) \right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$  ( $\simeq 0.55$ ); enfin,  $u_2 = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2} \, dt = \int_0^1 \frac{1}{(t+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \, dt =$

$$\frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t + \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1} dt = \frac{4}{3} \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \left( t + \frac{1}{2} \right) \right) \right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \arctan(\sqrt{3}) - \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} (\simeq 0.6).$$

2. Pour tout  $t$  dans  $[0; 1]$ , on a  $t^{n+1} \leq t^n$ , donc  $1 + t + t^{n+1} \leq 1 + t + t^n$  puis (tout étant positif)

$\frac{1}{1 + t + t^{n+1}} \geq \frac{1}{1 + t + t^n}$ . En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient  $u_{n+1} \geq u_n$ , la suite  $(u_n)$  est donc croissante.

3. Il faut réussir à majorer intelligemment ce qui se trouve sous l'intégrale, en l'occurrence en constatant que  $\forall t \in [0; 1]$ ,  $1 + t + t^n \geq 1 + t$ , donc  $\frac{1}{1 + t + t^n} \leq \frac{1}{1 + t}$ . En intégrant l'inégalité,

on obtient  $u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1 + t} dt = [\ln(1 + t)]_0^1 = \ln 2$  (la majoration doit être guidée par le fait qu'on veut obtenir  $\ln(2)$  à la fin).

4. La suite  $(u_n)$  est donc croissante et majorée, elle converge.

5. En utilisant le calcul fait un peu plus haut, on a  $\ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + t} dt - \int_0^1 \frac{1}{1 + t + t^n} dt =$

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + t} - \frac{1}{1 + t + t^n} dt.$$

6. Il suffit d'arriver à majorer ce qui se trouve sous l'intégrale :  $\frac{1}{1 + t} - \frac{1}{1 + t + t^n} = \frac{1 + t + t^n - (1 + t)}{(1 + t)(1 + t + t^n)} =$

$\frac{t^n}{(1 + t)(1 + t + t^n)}$ . Or, ce magnifique dénominateur est certainement plus grand que 1 quand

$t \in [0; 1]$ , donc  $\frac{1}{1 + t} - \frac{1}{1 + t + t^n} \leq t^n$ , et en intégrant cette inégalité on a  $\ln 2 - u_n \leq$

$$\int_0^1 t^n dt = \left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

7. On a vu plus haut que  $u_n \leq \ln 2$ , donc  $\ln 2 - u_n \geq 0$ . Comme on vient de majorer par ailleurs cette même expression par quelque chose qui tend vers 0, un coup de théorème des gendarmes nous donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2 - u_n) = 0$ , c'est-à-dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ln 2$ .

### Exercice 3 (\*)

1. Allons-y :  $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1 + t} dt = [\ln(1 + t)]_0^1 = \ln(2)$ , puis  $I_1 = \int_0^1 \frac{t}{1 + t} dt = \int_0^1 1 - \frac{1}{1 + t} dt =$

$$1 - I_0 = 1 - \ln(2), \text{ et enfin } I_2 = \int_0^1 \frac{t^2}{1 + t} dt = \int_0^1 \frac{t^2 + t}{1 + t} - \frac{t}{1 + t} dt = \int_0^1 t dt - I_2 =$$

$$\left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^1 - (1 - \ln(2)) = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}.$$

2. Même pas besoin de s'embêter à déterminer la monotonie de la suite (qui est en l'occurrence décroissante) : comme  $\frac{1}{1 + t} \leq 1$  sur  $[0, 1]$ , on peut encadrer  $I_n$  en écrivant  $0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n dt =$

$\left[ \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ . Il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

3. Pour une fois, inutile de faire une intégration par parties, il vaut mieux procéder astucieusement en généralisant les calculs de la première question :  $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1 + t} dt =$

$$\int_0^1 \frac{t^{n+1} + t^n}{1 + t} dt - I_n = \int_0^1 t^n dt - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n.$$

4. Méthode « avec les mains » :  $I_0 = 1 - I_1 = 1 - \frac{1}{2} + I_2 = \dots = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^n I_n$ .  
Autrement dit,  $\ln(2) = S_n + (-1)^n I_n$ , ou encore  $S_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$ .
5. Il n'y a plus rien à faire d'autre que de constater :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln(2)$ .

## Exercice 4 (\*\*)

1. Ça commence tranquillement :  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \, dx = \frac{\pi}{4}$ .  
Un poil moins tranquille :  $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = [\tan(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$ .
2. On veut donc calculer  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(x)} \, dx$  en posant  $t = \sin(x)$ , soit  $x = \arcsin(t)$  (c'est possible sur cet intervalle, puisque  $\sin$  y est bijective). On est sur un intervalle où  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  sont tous les deux positifs, donc  $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \sqrt{1 - t^2}$ . De plus,  $dx = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt$ , et les bornes de l'intervalle deviennent  $\sin(0) = 0$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . On peut donc écrire  $I_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1 - t^2} \, dt$ . Reste à décomposer en éléments simples :  $\frac{1}{1 - t^2} = \frac{1 + t + 1 - t}{2(1 + t)(1 - t)} = \frac{1}{2(1 + t)} + \frac{1}{2(1 - t)}$  (oui, je sais, c'est à la limite de l'escroquerie, on peut aussi rédiger le calcul de façon plus classique). Donc  $I_1 = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{2(1 + t)} + \frac{1}{2(1 - t)} \, dt = \frac{1}{2} [\ln(1 + t) - \ln(1 - t)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \left( \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right) = \frac{1}{2} \ln((\sqrt{2} + 1)^2) = \ln(\sqrt{2} + 1)$ .
3. Remarquons en passant que  $I_0 \simeq 0.8$ , et  $\sqrt{2} + 1 \simeq 2.4$ , ce qui est légèrement inférieur à  $e$ , donc  $I_1$  doit être assez proche de 1 (mais inférieur), ce qui semble indiquer une suite croissante. Prouvons-le : sur l'intervalle  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $0 < \cos(x) \leq 1$ , donc  $1 \leq \frac{1}{\cos(x)}$ . On en déduit que, pour tout entier  $n$ ,  $\frac{1}{\cos^n(x)} \leq \frac{1}{\cos^{n+1}(x)}$ , et il ne reste plus qu'à intégrer pour obtenir l'inégalité  $I_n \leq I_{n+1}$ . La suite  $(I_n)$  est donc bien croissante.
4. Écrivons donc  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(x)}{(\cos(x))^{n+2}} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} \, dx = I_{n+2} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} \, dx$ . On va effectuer une IPP sur ce dernier morceau en posant  $u(x) = \sin(x)$ , donc  $u'(x) = \cos(x)$ , et  $v'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^{n+2}(x)}$ , donc  $v(x) = \frac{1}{(n+1)\cos^{n+1}(x)}$ . On trouve donc  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)} \, dx = \left[ \frac{\sin(x)}{(n+1)\cos^{n+1}(x)} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(n+1)\cos^n(x)} \, dx = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(n+1) \times \frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}}} - \frac{I_n}{n+1}$ . Finalement,  $I_n = I_{n+2} - \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{I_n}{n+1}$ , ce qui donne bien  $I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{nI_n}{n+1}$ .
5. Dans la mesure où  $I_n \geq 0$  (on intègre une fonction positive), on peut déduire de la question précédente que  $I_{n+2} \geq \frac{\sqrt{2}^n}{n+1}$ . Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{n+1} = 0$  par croissance comparée, ce qui suffit à assurer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$ .

## Exercice 5 (\*\*\*)

Je vous sens tous venir avec votre récurrence, oubliez-là, ça ne sert à rien. Observer ce qui se passe pour les petites valeurs de  $n$  peut être utile. Ainsi, pour  $n = 0$ , le résultat est une conséquence du fait qu'une fonction (non nulle) de signe constant sur un intervalle ne peut pas avoir une intégrale nulle. Pour  $n = 1$ , raisonnons par l'absurde en supposant que  $f$  ne s'annule qu'une seule fois, disons en  $c$ . Alors la fonction est (par exemple) strictement positive sur  $[0, c]$  et strictement négative sur  $[c, 1]$  (si c'est le contraire, on prend  $-f$  qui vérifie également les hypothèses de l'énoncé). L'astuce est alors de constater que la fonction  $g : t \mapsto (c - t)f(t)$  est de signe constant sur  $[0, 1]$ , en l'occurrence positive (puisque les deux facteurs sont positifs si  $t \leq c$  et les deux sont positifs si  $t \geq c$ ). Pourtant,  $\int_0^1 (t - c)f(t) dt = \int_0^1 tf(t) dt - c \int_0^1 f(t) dt = 0 - c \times 0 = 0$ . La fonction n'étant pas tout le temps nulle sur  $[0, 1]$ , on tient une absurdité.

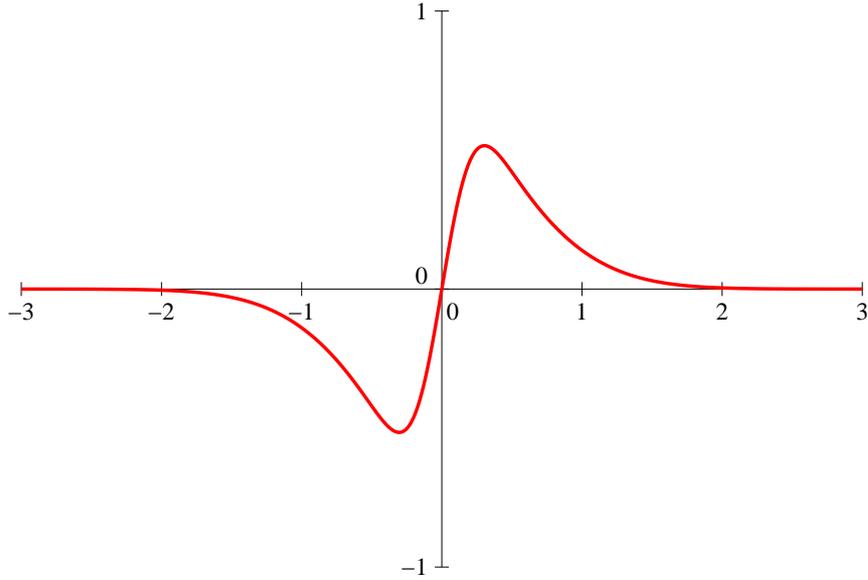
Généralisons ce résultat, en raisonnant par l'absurde dans le cas général. Supposons que  $f$  s'annule exactement  $n$  fois (si elle s'annule moins, c'est encore plus facile) en  $c_1 < c_2 < \dots < c_n$  en changeant de signe à chaque fois (si  $f$  ne change pas de signe, on enlève purement et simplement la valeur correspondante). Notons alors  $P = (t - c_1)(t - c_2) \dots (t - c_n)$ . Ce polynôme change lui aussi de signe en  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , dont le produit  $Pf(t)$  est de signe constant sur  $[0, 1]$ . Pourtant, son intégrale est nulle. En effet, quel que soit le polynôme  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  de degré  $n$  (ou moins), par linéarité de l'intégrale,  $\int_0^1 P(t)f(t) dt = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^1 t^k f(t) dt = 0$ . Là encore, on a une contradiction, la fonction  $f$  ne peut donc pas s'annuler moins de  $n + 1$  fois.

## Exercice 6 (\*\*\*)

- La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  puisque la fonction qu'on intègre est définie partout. Par ailleurs, la fonction intégrée est paire, ce qui permet de prouver que  $f$  est impaire : en faisant le changement de variables  $u = -t$ ,  $f(-x) = \int_{-x}^{-4x} e^{-t^2} dt = \int_x^{4x} -e^{-u^2} du = -f(x)$ . En notant  $g(t) = e^{-t^2}$  et  $G$  une primitive de  $g$ , on peut écrire  $f(x) = G(4x) - G(x)$ , donc  $f'(x) = 4g(4x) - g(x) = 4e^{-16x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(4e^{-15x^2} - 1)$ . La dérivée s'annule lorsque  $e^{-15x^2} = \frac{1}{4}$ , soit  $-15x^2 = -2\ln(2)$ , donc  $x = \pm\sqrt{\frac{2\ln(2)}{15}}$ . La seule limite à calculer est en  $+\infty$ , si  $x \geq 0$  on peut majorer  $e^{-t^2}$  par  $e^{-x^2}$  sur  $[x, 4x]$ , donc  $0 \leq f(x) \leq \int_x^{4x} e^{-x^2} dt = 3xe^{-x^2}$ , qui a une limite nulle en  $+\infty$  par croissance comparée. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . On peut résumer ces informations dans le tableau de variations suivant (inutile d'essayer de calculer les valeurs des extrema, on note  $x_1$  et  $-x_1$  leurs abscisses pour simplifier) :

$x$	$-\infty$	$-x_1$	$0$	$x_1$	$+\infty$
$f$	$0$	$-f(x_1)$	$0$	$f(x_1)$	$0$

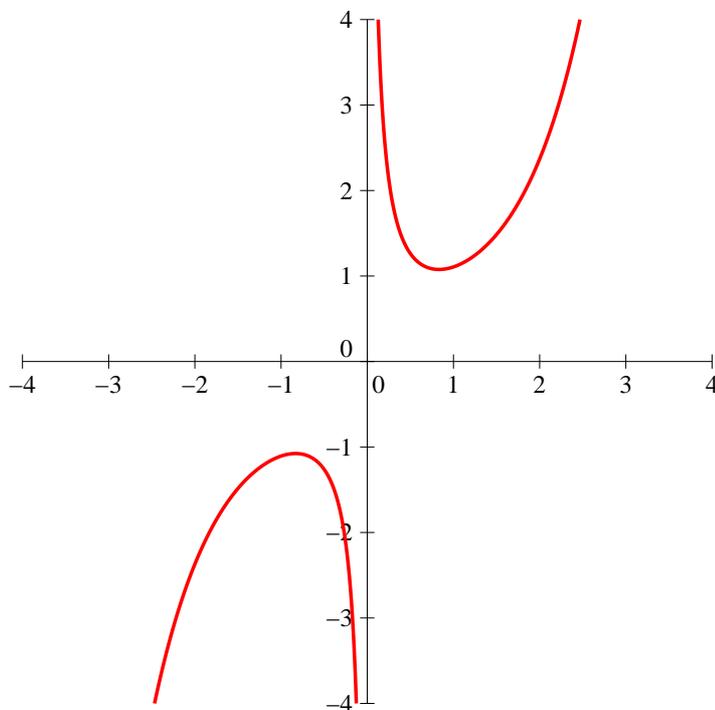
Et voici une allure de la courbe :



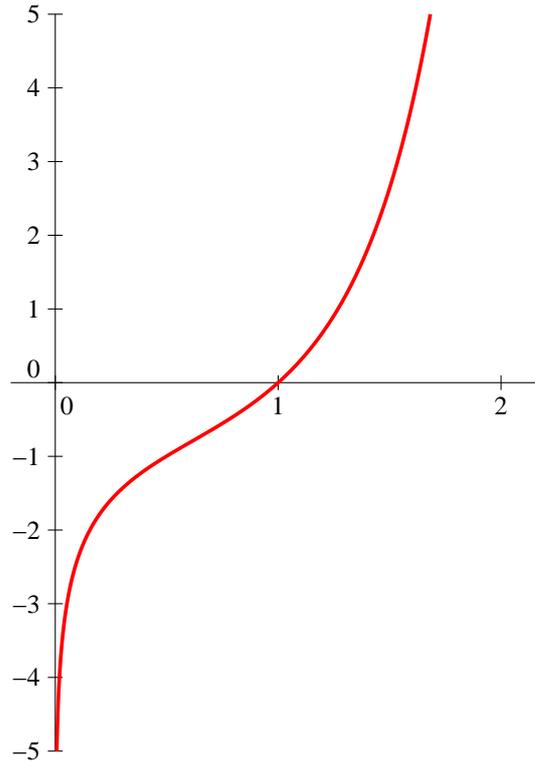
- Les techniques seront toujours les mêmes. Ici, la fonction à intégrer est définie sur  $\mathbb{R}^*$  (et n'est pas prolongeable par continuité en 0), donc  $g$  sera définie également sur  $\mathbb{R}^*$  (si  $x \neq 0$ ,  $0 \notin [x, 2x]$ ). La fonction  $g$  est par ailleurs impaire comme intégrale d'une fonction paire, comme on vient de le prouver pour la fonction précédente. On se contentera donc d'étudier la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . On dérive comme d'habitude : en posant  $f(t) = \frac{\text{ch}(t)}{t^2}$  et  $F$  une primitive de  $f$ , alors  $g(x) = F(2x) - F(x)$ , donc  $g'(x) = 2f(2x) - f(x) = \frac{\text{ch}(2x) - 2\text{ch}(x)}{2x^2}$ . Or,  $\text{ch}(2x) = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 2}{2} = 2\text{ch}^2(x) - 1$ , donc  $g'(x)$  est du signe de  $2\text{ch}^2(x) - 2\text{ch}(x) - 1$ . En posant  $X = \text{ch}(x)$ , on est ramenés à la résolution de l'équation  $2X^2 - 2X - 1 = 0$ , qui a pour discriminant  $\Delta = 12$ , et admet pour racines  $X_1 = \frac{2 + \sqrt{12}}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ , et  $X_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ . On ne garde que la première racine, la seconde étant plus petite que 1 et ne pouvant convenir comme valeur de  $\text{ch}(x)$ . On est maintenant ramenés à résoudre l'équation  $\text{ch}(x) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ , soit  $e^x + e^{-x} = 1 + \sqrt{3}$ . En posant cette fois-ci  $X = e^x$ , on se retrouve à devoir résoudre  $X^2 - (1 + \sqrt{3})X + 1 = 0$ , qui a pour discriminant  $\Delta = (1 + \sqrt{3})^2 - 4 = 2\sqrt{3}$ , et pour racines  $X_3 = \frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$ , et  $X_4 = \frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}$ . La deuxième valeur est inférieure à 1 car  $2\sqrt{3} > 3$ , donc mènera à une valeur de  $x$  négative qui ne nous intéresse pas (qui est en fait l'opposé de celle qu'on va garder). On se contentera de garder comme valeur d'annulation de  $g'$  le nombre  $x_0 = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2\sqrt{3}}}{2}\right)$ . Ouf! Évidemment, voilà encore une valeur pour laquelle on sera incapable de déterminer ne serait-ce qu'une valeur approchée du maximum. On peut par contre déterminer les limites de  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$  :  $\forall t \in [x, 2x]$ ,  $\text{ch}(x) \leq \text{ch}(t) \leq \text{ch}(2x)$ , et  $\frac{1}{4x^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2}$ , donc  $\frac{\text{ch}(x)}{4x^2} \leq f(t) \leq \frac{\text{ch}(2x)}{x^2}$ , puis par intégration sur le segment  $[x, 2x]$ ,  $\frac{\text{ch}(x)}{4x} \leq g(x) \leq \frac{\text{ch}(2x)}{x}$ . Par croissance comparée, le membre de gauche tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (il y aura même une branche parabolique de direction  $(Oy)$ ). En 0, chacun des deux membres tend vers  $+\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ . On en déduit évidemment les limites en  $0^-$  et en  $-\infty$  par imparité de la fonction, et on peut dresser le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$-x_0$	$0$	$x_0$	$+\infty$
$g$	$-\infty$	$-f(x_0)$	$+\infty$	$f(x_0)$	$+\infty$

Et une allure de la courbe :



- Et une dernière pour la route, la fonction  $f : t \mapsto \frac{e^t}{t}$  est définie sur  $\mathbb{R}^*$  (et n'est pas prolongeable par continuité en 0), donc  $h(x)$  existe si  $0 \notin [x, x^2]$ , ce qui est le cas si  $x > 0$ . Autrement dit,  $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}^{+*}$ . Comme d'habitude,  $h(x) = F(x^2) - F(x)$ , donc  $h'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{2xe^{x^2}}{x^2} - \frac{e^x}{x} = \frac{2e^{x^2} - e^x}{x}$ . Cette dérivée est du signe de  $2e^{x^2} - e^x = e^x(2e^{x^2-x} - 1)$ . Elle est positive lorsque  $x^2 - x \geq -\ln(2)$ , or  $x^2 - x$  admet son minimum en  $\frac{1}{2}$ , de valeur  $-\frac{1}{4} \geq -\ln(2)$ . La fonction  $h$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ . On peut ajouter facilement que  $h(x) \geq 0$  si  $x \geq 1$ , mais  $h(x) \leq 0$  sur  $]0, 1]$  puisque les bornes de l'intégrale sont alors « dans le mauvais sens ». Les limites sont assez faciles à calculer :  $\forall x \geq 1, h(x) \geq \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t^2} dt = \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^x$ , ce qui suffit à prouver que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ . Par ailleurs,  $\forall x \in ]0, 1], h(x) \leq \int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt$  (n'oubliez pas que les bornes sont dans le mauvais sens), donc  $h(x) \leq \ln(x^2) - \ln(x) = \ln(x)$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty$ . Pas de tableau de variations cette fois-ci (il n'y aurait pas grand chose à mettre dedans), on se contentera d'une dernière allure de courbe :



### Exercice 7 (\*\*\*)

1. (a) Prenons deux réels  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  tels que  $x < y$ . On a alors  $e^{-tx} > e^{-ty}$  pour tout  $t \in [0; 1]$ . De même  $t^k e^{-tx} > t^k e^{-ty}$  et on peut intégrer cette inégalité, ce qui donne exactement  $f_k(x) > f_k(y)$ , donc  $f_k$  est bien décroissante.
 

(b) On a  $f_k(0) = \int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$ . La suite  $(f_k(0))$  est donc décroissante et tend vers 0. Or,  $f_k$  étant positive et décroissante sur  $\mathbb{R}^+$ , on a  $\forall x > 0, 0 \leq f_k(x) \leq \frac{1}{k+1}$ , ce qui suffit à assurer via le théorème des gendarmes que  $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$  converge vers 0.
2. (a) Il s'agit de faire une IPP en posant  $u(t) = t^{k+1}$  et  $v'(t) = e^{-tx}$ , donc  $u'(t) = (k+1)t^k$  et  $v(t) = -\frac{e^{-tx}}{x}$  (faites bien gaffe que la variable ici est  $t$  et  $x$  est donc une constante). On obtient  $f_{k+1}(x) = \left[ -t^{k+1} \frac{e^{-tx}}{x} \right]_0^1 + (k+1) \int_0^1 t^k \frac{e^{-tx}}{x} dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{k+1}{x} f_k(x)$ .
 

(b) On a  $f_0(x) = \int_0^1 e^{-tx} dt = \left[ -\frac{e^{-tx}}{x} \right]_0^1 = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1 - e^{-x}}{x}$ . On peut utiliser la question précédente pour calculer les fonctions suivantes :  $f_1(x) = \frac{1}{x} f_0(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x^2} (1 - e^{-x} - x e^{-x})$ , puis  $f_2(x) = \frac{2}{x} f_1(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x^3} (2 - 2e^{-x} - 2x e^{-x} - x^2 e^{-x})$ .

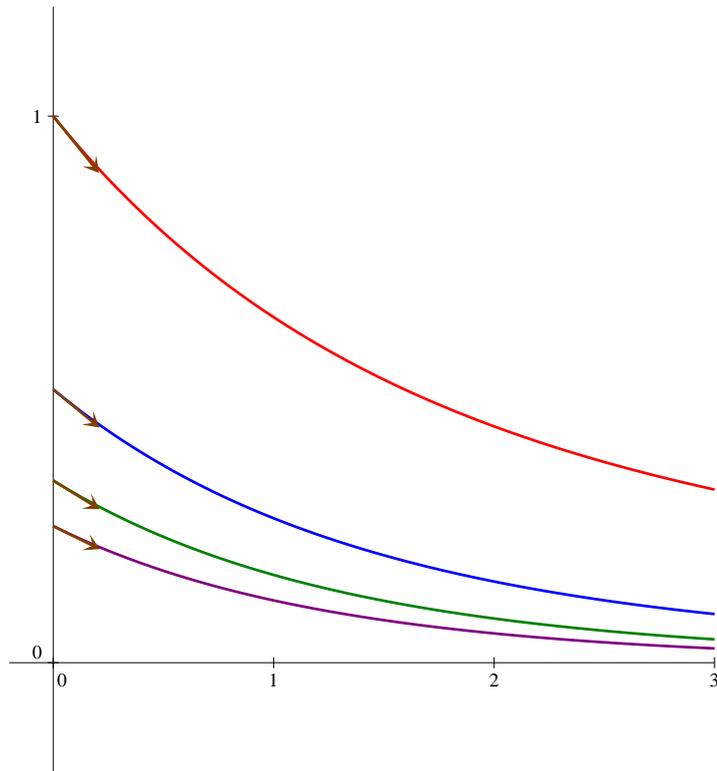
(c) Il suffit de reprendre l'expression trouvée :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-x} = 1$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f_0(x) = 1$ .
3. (a) Le changement de variable est  $u = tx$ , qui donne  $du = x dt$ , et change les bornes de l'intégrale en 0 et  $x$ , ce qui donne donc  $f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u} \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^x u^k e^{-u} du$ .

(b) On vient d'écrire  $f_k(x)$  sous la forme d'un produit  $g(x)h(x)$ , où  $g(x) = \frac{1}{x^{k+1}}$ , et donc  $g'(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}$ , et  $h(x) = \int_0^x u^k e^{-u} du$ , donc  $h'(x) = x^k e^{-x}$ . On en déduit que  $f'_k(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}h(x) + \frac{1}{x^{k+1}}x^k e^{-x} = -\frac{k+1}{x}f_k(x) + \frac{e^{-x}}{x}$ . On vient donc de montrer, en reprenant le résultat de la question 2.a, que  $f'_k = -f_{k+1}$ .

(c) On étudie la fonction  $y \mapsto 1 - e^{-y} - y$  sur  $\mathbb{R}^+$ . sa dérivée vaut  $e^{-y} - 1$ , qui est négative sur l'intervalle d'étude. Or, pour  $y = 0$ , la fonction est nulle. Elle est donc bien négative sur  $\mathbb{R}^+$ .

On a donc  $f_k(x) - f_k(0) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt - \int_0^1 t^k dt = \int_0^1 t^k (e^{-tx} - 1) dt \geq \int_0^1 t^{k+1} x dt = \frac{x}{k+2}$ . Quand  $x$  tend vers 0, ceci tend vers 0. Comme par ailleurs  $f_k(x) - f_k(0)$  est négatif puisque  $f_k$  est décroissante, la fonction  $f_k$  est bien continue en 0.

Pour la dérivée, on utilise ce bon vieux théorème du prolongement de la dérivée! La fonction  $f_k$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de dérivée  $f'_k = -f_{k+1}$ . On vient de voir que  $f_{k+1}$  était continue en 0, donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f_{k+1}(x) = f_{k+1}(0) = \frac{1}{k+2}$ . On en déduit que  $\lim_{x \rightarrow 0} f'_k(x) = -\frac{1}{k+2}$  puis que  $f_k$  est dérivable en 0, de dérivée  $f'_k(0) = -\frac{1}{k+2}$ . Les courbes des fonctions  $f_k$  sont assez décevantes, mais voici l'allure des quatre premières ( $f_0$  à  $f_3$ , de haut en bas), les valeurs et tangentes en 0 correspondant évidemment aux valeurs calculées) :



## Exercice 8 (\*\*)

- Le but est donc de faire apparaître une somme de Riemann, ce qui consiste en gros à sortir un  $\frac{1}{n}$  de la somme et à exprimer ce qui reste dans la somme en fonction de  $\frac{k}{n}$  uniquement :  $u_n =$

$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2 + k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2(1 + (\frac{k}{n})^2)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\frac{k}{n}}{1 + (\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ , avec  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . Le théorème de convergence des sommes de Riemann permet alors d'affirmer que  $(u_n)$  converge et que sa limite vaut  $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$ .

- Même méthode :  $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ , avec  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$ , donc  $(v_n)$  converge vers  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}} dx = [\sqrt{1+2x}]_0^1 = \sqrt{3} - 1$ .

- Pour  $w_n$ , c'est un peu plus subtil, il vaut mieux étudier  $\ln(w_n)$  et surtout se rendre compte que  $\ln(n!) = \ln(1 \times 2 \times \dots \times n) = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n$ . On a alors :

$$\ln w_n = \frac{1}{n} (\ln((2n)!) - n \ln n - \ln(n!)) = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{k=2n} \ln k - n \ln n - \sum_{k=1}^{k=n} \ln k \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{k=2n} (\ln k - \ln n)$$

$$\ln w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{k=2n} \ln \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln \frac{n+k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \ln \left( 1 + \frac{k}{n} \right), \text{ donc } (\ln w_n) \text{ converge vers}$$

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = \int_1^2 \ln u du = [x \ln x - x]_1^2 = 2 \ln 2 - 1, \text{ et } (w_n) \text{ converge vers } e^{2 \ln 2 - 1} = \frac{4}{e}.$$

### Exercice 9 (\*\*\*\*)

1. En n'oubliant pas l'hypothèse  $\pi = \frac{p}{q}$ ,  $P_n(X - \pi) = \frac{1}{n!} \left( \frac{p}{q} - X \right)^n (p - p + qX)^n = \frac{1}{n!} \frac{(p - qX)^n}{q^n} \times q^n X^n = P_n(X)$ .
2. Si  $\pi = \frac{p}{q}$ ,  $p - qt$  est positif sur  $[0, \pi]$ , donc l'intégrale est celle d'une fonction positive, elle est positive.
3. Prouvons-le pour 0 : comme il est racine de multiplicité  $n$  de  $P_n$ , il annule déjà toutes les dérivées  $k$ -èmes lorsque  $k < n$ . Supposons désormais  $k > n$ , en appliquant la formule de Leibniz au produit  $X^n(p - qX)^n$ , la seule dérivée de  $X^n$  ne s'annulant pas en 0 est la dérivée  $n$ -ème, qui vaut  $n!$ , donc  $P_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} \binom{n}{k} n! (p - qX)^{n(k-n)}(0)$ . Les  $n!$  se simplifient, le coefficient binomial est un entier, il suffit de prouver que la dérivée restante est aussi entière. Elle sera nulle si  $k - n > n$ , soit  $k < 2n$ , sinon  $((p - qX)^n)^{(k-n)} = n(n-1) \dots (2n - k + 1)(p - qX)^{2n-k}$ , qui prend pour valeur en 0 le nombre  $\frac{n!}{(2n - k)!} p^{2n-k}$ , qui est certainement un entier. On a bien prouvé que  $P_n^{(k)}(0)$  était toujours un entier. Comme  $P_n(\pi - X) = P_n(X)$ ,  $P_n^{(k)}(\pi) = (-1)^k P_n^{(k)}(0)$  est également un entier.
4. Pour  $n = 0$ ,  $I_0 = \int_0^\pi \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^\pi = 2 \in \mathbb{N}$ . Prenons maintenant un entier supérieur ou égal à 1, et effectuons deux intégrations par partie successives (en dérivant  $P_n$  à chaque fois), en exploitant le fait que  $P_n$  s'annule en 0 et en  $\pi$  (c'est le cas de tous les polynômes  $P_n$  à partir de  $n = 1$ ) et, comme on vient de le voir, que les dérivés  $P_n'$  prennent des valeurs entières en 0 et en  $\pi$ . On calcule donc  $I_n = [-P_n(t) \cos(t)]_0^\pi + \int_0^\pi P_n'(t) \cos(t) dt = \int_0^\pi O_n'(t) \cos(t) dt$  (le crochet s'annule)  $= [P_n'(t) \sin(t)]_0^\pi - \int_0^\pi P_n''(t) \sin(t) dt = - \int_0^\pi P_n''(t) \sin(t) dt$ . Bon, ben il ne reste plus qu'à recommencer, en faisant attention au fait que les crochets ne vont pas continuer à tous s'annuler : à l'étape suivante  $P_n''(t) \cos(t)$  ne s'annule plus en 0 et en  $\pi$ . Par contre ce qui est certain, c'est qu'il prend une valeur entière en 0 et en  $\pi$ , donc on

peut écrire  $I_n = a_3 - \int_0^\pi P^{(3)}(t) \cos(t) dt = a_3 + \int_0^\pi P^{(4)}(t) \sin(t) dt$ , avec  $a_3 \in \mathbb{Z}$ . Et on continue. À chaque étape, le premier crochet donnera un nombre entier, et le second s'annulera, pour donner  $I_n = a_{2k-1} + (-1)^k \int_0^\pi P^{(2k)}(t) \sin(t) dt$ , avec  $a_{2k-1} \in \mathbb{Z}$ . Pour être rigoureux, ça se démontre bien sûr par récurrence : on a vu plus haut que c'était vrai pour  $k = 1$  et  $k = 2$  et en le supposant au rang  $k$ , avec deux IPP de plus,  $I_n = a_{2k-1} + \int_0^\pi P^{(2k)}(t) \sin(t) dt = a_{2k-1} + [(-1)^{k+1} P^{(2k)}(t) \cos(t)] + (-1)^k \int_0^\pi P^{(2k+1)}(t) \cos(t) dt = a_{2k+1} + [(-1)^k P^{(2k+1)}(t) \sin(t)]_0^\pi + (-1)^{k+1} \int_0^\pi P^{(2k+2)}(t) \sin(t) dt$ , où  $a_{2k+1}$  est égal à  $a_{2k-1}$  plus la valeur du crochet avec le cosinus, ce qui donne bien à nouveau un nombre entier. Par principe de récurrence, la formule est vraie pour tout entier  $k$ , et en particulier pour  $k = n$ , valeur pour laquelle  $\int_0^\pi P^{(2k)}(t) \sin(t) dt = 0$ , puisque  $P^{(2n)} = 0$ . Il ne reste plus alors que  $I_n = a_{2n-2} \in \mathbb{Z}$ . Comme par ailleurs  $I_n \geq 0$ ,  $I_n \in \mathbb{N}$ .

5. La fonction  $x \mapsto x(p - qx)$  étant continue sur  $[0, \pi]$ , elle y atteint un maximum  $M$  (qu'on peut d'ailleurs calculer explicitement si on le souhaite), donc  $P_n(t) \leq \frac{1}{n!} M^n$  sur  $[0, \pi]$ , et  $I_n \leq \int_0^\pi \frac{M^n}{n!} \sin(t) dt = \frac{2M^n}{n!}$ , qui a une limite nulle quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Puisque la suite est constituée de nombres entiers, elle est forcément nulle à partir d'un certain rang  $n_0$  (par application de la définition de la limite avec par exemple  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , on doit avoir  $-\frac{1}{2} \leq I_n \leq \frac{1}{2}$  à partir d'un certain rang, donc  $I_n = 0$ ). Mais comme on a vu que la fonction sous l'intégrale était toujours positive sur  $[0, \pi]$ , avoir une intégrale nulle signifie que  $P_n(t) \sin(t)$  vaut toujours 0 entre 0 et  $\pi$ . En particulier, le polynôme  $P_n$  doit s'annuler une grosse infinité de fois (puisque  $\sin$  ne s'annule qu'une seule fois sur l'intervalle), ce qui implique que  $P_n$  est le polynôme nul. Voilà une grosse absurdité,  $P_n$  n'est manifestement pas égal à 0, donc notre hypothèse de départ est fautive et  $\pi$  ne peut pas être rationnel.

### Exercice 10 (\*\*\*)

- Allons-y :  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$  et  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ .
- Il suffit de penser à effectuer le changement de variable  $u = \frac{\pi}{2} - t$  (donc  $du = -dt$ ), qui se contente d'échanger les bornes de l'intégrale et surtout de transformer le  $\sin$  en  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos(u)$ . On obtient alors immédiatement  $I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\cos^n(u) du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(u) du$ .
- Il faut penser pour l'IPP à poser  $u(t) = \sin^{n+1}(t)$  et  $v'(t) = \sin(t)$ , donc  $u'(t) = (n+1) \cos(t) \sin^n(t)$  et  $v(t) = -\cos(t)$ , pour obtenir  $I_n = [-\cos(t) \sin^n(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \sin^n(t) dt = 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t)) \sin^n(t) dt = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) - \sin^{n+2}(t) dt = (n+1)(I_n - I_{n+2})$ .  
On en déduit que  $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ , soit  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ .
- D'après la question précédente,  $I_{2p} = \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)} I_{2p-4} = \dots$   
 $= \frac{(2p-1)(2p-3) \dots 1}{2p(2p-2) \dots 2} I_0 = \frac{(2p)(2p-1)(2p-2)(2p-3) \dots 2 \times 1}{(2p^2)(2p-2)^2 \dots 2^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p^2 (p-1)!^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)! \pi}{2^{2p+1} (p!)^2}$ . De même,  $I_{2p+1} = \frac{(2p)(2p-2) \dots 2}{(2p+1)(2p-1) \dots 3} \times I_1 = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$ .

5. Puisque le sinus est positif entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  (et évidemment plus petit que 1), on a  $\sin^{n+1}(t) \leq \sin^n(t)$  sur cet intervalle, donc par intégration  $I_{n+1} \leq I_n$ . La suite est donc décroissante. Elle est positive donc minorée, donc convergente.
6. Il suffit d'appliquer la décroissance de la suite  $(I_n)$  pour obtenir  $\frac{I_n}{I_n} \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{I_n}{I_{n+2}}$ , soit  $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n+2}$  en reprenant le résultat de la question 3. Puisque le membre de droite a pour limite 1, une simple application du théorème des gendarmes permet d'affirmer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_n}{I_{n+1}} = 1$ .
7. Plusieurs possibilités ici. Soit on reprend les formules obtenues à la question 4 et on constate de grosses simplifications :  $I_{2n+1}I_{2n} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \times \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} = \frac{\pi}{2 \times (2n+1)}$ , et de même  $I_{2n}I_{2n-1} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \times \frac{2^{2n-2}(n-1)!^2}{(2n-1)!} = \frac{2n\pi}{2^3n^2} = \frac{\pi}{2 \times 2n}$ . Dans les deux cas, que  $n$  soit pair ou impair,  $I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2(n+1)}$ .
- Autre possibilité, constater que  $(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$  en reprenant la relation de la question 3, donc la suite  $((n+1)I_{n+1}I_n)$  est constante égale à son premier terme  $I_1I_0 = \frac{\pi}{2}$ .

### Exercice 11 (\*\*\*)

1. La fonction  $t \mapsto e^{t^2}$  étant paire,  $\int_{-x}^0 e^{t^2} dt = \int_0^x e^{t^2} dt$ , et  $f(-x) = -f(x)$  (attention à l'inversion des bornes dans l'intégrale!), le facteur  $e^{-x^2}$  restant lui inchangé.
2. On peut très simplement dériver  $f$  comme un produit, la dérivée de  $x \mapsto \int_0^x e^{t^2} dt$  étant égale à  $e^{x^2}$ . On obtient alors  $f'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + e^{-x^2} e^{x^2} = -2xf(x) + 1$ . La fonction  $f$  est donc solution de l'équation différentielle  $y' + 2xy = 1$ .
3. C'est loin d'être évident (bien sûr, d'après la question précédente, cela revient à montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$ , mais ce n'est pas plus facile). On commence par effectuer une IPP sur  $\int_1^x e^{t^2} dt$  (pour faire apparaître le terme prépondérant dans  $f(x)$ , méthode classique même si c'est assez brutal ici, et qu'on est obligés de partir de 1 et pas de 0 vu le calcul qu'on va faire ensuite) en posant  $u'(t) = 2te^{t^2}$ , donc  $u(t) = e^{t^2}$ , et  $v(t) = \frac{1}{2t}$ , donc  $v'(t) = -\frac{1}{2t^2}$ , pour obtenir  $\int_1^x e^{t^2} dt = \left[ \frac{e^{t^2}}{2t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e}{2} + \int_1^x \frac{e^{t^2}}{2t^2} dt$ . On en déduit que  $1 - 2xf(x) = 1 - 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{t^2} dt - 2xe^{-x^2} \int_1^x e^{t^2} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{t^2} dt + exe^{-x^2} + xe^{-x^2} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$ . Le premier terme a une limite nulle par croissance comparée (l'intégrale de 0 à 1 étant une constante), le deuxième terme tend également vers 0 (toujours de la croissance comparée). Reste le troisième. Le dernier morceau (avec l'intégrale de 1 à  $x$ ), pose encore des problèmes : on a bien envie de majorer la fonction dans l'intégrale pour obtenir quelque chose de calculable qui tend vers 0, mais en majorant  $e^{t^2}$  par  $e^{x^2}$  sur  $[1, x]$ , par exemple, la majoration obtenue n'est pas suffisante (on majore par une constante). Il vaut mieux couper en deux sous la forme  $xe^{-x^2} \int_1^{x-1} \frac{e^{t^2}}{t^2} dt + xe^{-x^2} \int_{x-1}^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$ . Dans le

premier morceau (en supposant  $x \geq 2$ ), on majore  $e^{t^2}$  par  $e^{(x-1)^2}$  et  $\frac{1}{t^2}$  par 1 pour trouver  $x e^{-x^2} \int_1^{x-1} \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq x e^{-x^2} \times e^{(x-1)^2} \int_1^{x-1} 1 dt = x(x-2)e^{-2x+1}$ . Cette quantité a pour limite 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (encore de la croissance comparée). Dans le dernier morceau, on se contente de majorer le numérateur, en gardant le dénominateur intact :  $x e^{-x^2} \int_{x-1}^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt \leq x \int_{x-1}^x \frac{1}{t^2} dt = x \left[ -\frac{1}{t} \right]_{x-1}^x = x \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x-1}$ . Ouf, ça tend encore vers 0, et achève notre démonstration :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xf(x) = 1!$

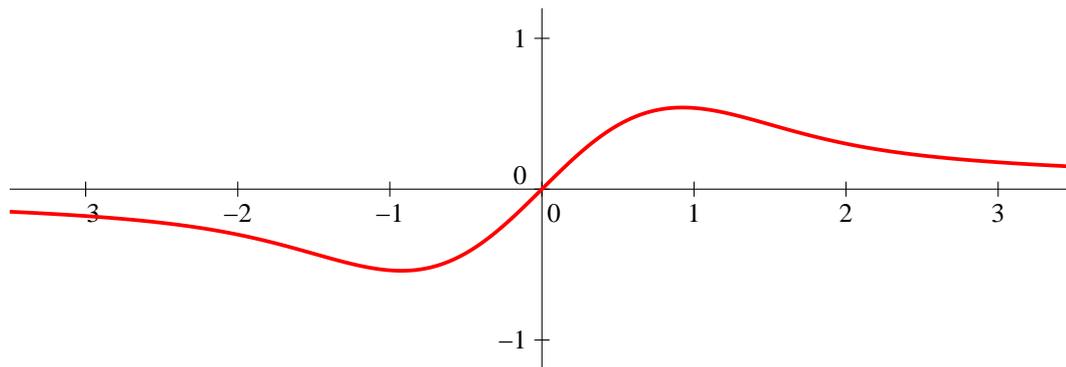
4. Au vu de la relation trouvée à la deuxième question,  $g(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}(1-2xf(x)) = \frac{e^{x^2}}{2x} - \int_0^x e^{t^2} dt$ .

On dérive pour obtenir  $g'(x) = \frac{4x^2 e^{x^2} - 2e^{x^2}}{4x^2} - e^{x^2} = -\frac{e^{x^2}}{2x^2} < 0$ , donc la fonction  $g$  est effectivement décroissante. Étant continue, elle est nécessairement bijective de  $\mathbb{R}^{+*}$  vers un intervalle inconnu. Comme  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} 1 - 2xf(x) = 1$ , et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ . Inutile de chercher la limite de  $g$  en  $-\infty$ , puisque l'énoncé prétend que la fonction s'annule entre 0 et 1, vérifier que  $g(1) < 0$  suffit, ce qui découle du fait que  $1 - 2f(1) < 0$ . Or,  $1 - 2f(1) = 1 - \frac{2}{e} \int_0^1 e^{t^2} dt$ . Il faudrait donc que  $\int_0^1 e^{t^2} dt > \frac{e}{2}$ . Malheureusement, cette intégrale n'est pas calculable de façon exacte. On en connaît toutefois des valeurs approchées précises (par exemple quand on a des tables de loi normale sous la main!), et l'inégalité est effectivement vérifiée (si vous avez beaucoup de temps à perdre, effectuez la méthode des rectangles pour le vérifier).

5. D'après la question précédente,  $g$ , et donc  $f'$ , est positive sur  $[0, x_0[$  et négative ensuite. La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $[0, x_0[$ , et décroissante ensuite. On sait évidemment que  $f(0) = 0$ , et les limites de  $f$  aux infinis sont nulles puisque  $2xf(x)$  tend elle-même vers 0. En utilisant de plus l'imparité de la fonction, on peut dresser le tableau suivant :

$x$	$-\infty$	$-x_0$	0	$x_0$	$+\infty$
$f$	0	$-f(x_0)$	0	$f(x_0)$	0

6. Inutile de chercher à calculer la valeur des extrema, mais on sait déjà que  $f(1) \geq \frac{1}{2}$ , ce qui donne une borne inférieure (vu le peu d'écart entre les deux valeurs, on peut se douter que  $x_0$  est proche de 1 et le maximum proche également de  $\frac{1}{2}$ ). La courbe représentative de  $f$  ressemble en fait à ceci :



## Problème (\*\*\*)

### Première partie : à l'aide d'intégrales.

- Pour la première intégrale, on effectue une IPP en posant  $u(t) = t$ , donc  $u'(t) = 1$ , et  $v'(t) = \cos(kt)$ , donc  $v(t) = \frac{\sin(kt)}{k}$ . On obtient  $\int_0^\pi t \cos(kt) dt = \left[ \frac{t \sin(kt)}{k} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(kt)}{k} dt = 0 - \left[ -\frac{\cos(kt)}{k^2} \right]_0^\pi = \frac{\cos(k\pi) - 1}{k^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2}$ . Pour la deuxième intégrale, qu'on notera  $I_k$ , on effectue une première IPP en posant  $u(t) = t^2$ , donc  $u'(t) = 2t$ , et  $v'(t) = \cos(kt)$ , donc  $v(t) = \frac{1}{k} \sin(kt)$ . On obtient  $I_k = \frac{1}{k} [t^2 \sin(kt)]_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi 2t \sin(kt) dt = -\frac{2}{k} \int_0^\pi t \sin(kt) dt$ . Allez hop, on refait une IPP ! On pose  $u(t) = t$ , donc  $u'(t) = 1$  et  $v'(t) = \sin(kt)$ , donc  $v(t) = -\frac{\cos(kt)}{k}$ , et on trouve alors  $I_k = \frac{2}{k^2} [t \cos(kt)]_0^\pi - \frac{2}{k^2} \int_0^\pi \cos(kt) dt = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2} - \frac{2}{k^3} [\sin(kt)]_0^\pi = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2}$ .
- On peut faire une identification un peu lourdingue, mais ce n'est pas vraiment nécessaire : on prend  $a = -1$  pour trouver le  $\frac{1}{k^2}$ , puis  $b = \frac{1}{2\pi}$  pour annuler le terme faisant intervenir du  $(-1)^k$  : par linéarité de l'intégrale,  $\int_0^\pi \left( -t + \frac{1}{2\pi} t^2 \right) \cos(kt) dt = \frac{1 - (-1)^k}{k^2} + \frac{1}{2\pi} \times \frac{2\pi(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{k^2}$ .
- Toujours par linéarité de l'intégrale,  $\int_0^\pi (at + bt^2) S_n(t) dt = \int_0^\pi at + bt^2 dt + 2 \sum_{k=1}^n \int_0^\pi (at + bt^2) \cos(kt) dt = C + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ , en posant  $C = \int_0^\pi at + bt^2 dt = \left[ \frac{at^2}{2} + \frac{bt^3}{3} \right]_0^\pi = \frac{a\pi^2}{2} + \frac{b\pi^3}{3} = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi^2}{3}$ .
- On va bien sûr passer par les complexes pour simplifier le calcul :  $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(e^{ikt}) = \operatorname{Re}(e^{it} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikt})$ . On reconnaît une somme géométrique dont la raison est différente de 1 lorsque  $t \neq 0[2\pi]$ . On peut alors écrire  $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \operatorname{Re} \left( e^{it} \times \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} \right) = \operatorname{Re} \left( e^{it} \frac{e^{i\frac{nt}{2}} (e^{-i\frac{nt}{2}} - e^{i\frac{nt}{2}})}{e^{i\frac{t}{2}} (e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}})} \right) =$

$\operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\frac{(n+1)t}{2}} - 2i \sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right) = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ . Il est temps de sortir une des formules de trigonométrie qu'on préfère pour modifier le numérateur : la transformation produit-somme  $\cos(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$ , qui donne ici  $\sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{1}{2} \times \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - 1 \right)$ . La formule de l'énoncé en découle immédiatement, en multipliant par 2 et en ajoutant 1.

Par ailleurs, on a manifestement  $S_n(0) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n 1 = 2n + 1$ .

5. Notons  $f$  la fonction en question, on peut écrire  $f(t) = \frac{t(a+bt)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ . Or, on sait que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$ . En l'appliquant après avoir posé  $x = \frac{t}{2}$  (qui tend bien vers 0), on en déduit que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} = 1$ . On en déduit que  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 2 \times \lim_{t \rightarrow 0} (a+bt) = 2a = -2$ . La fonction  $f$  est donc prolongeable en 0 en posant  $f(0) = -2$ . Pour savoir si la fonction prolongée est dérivable (et  $\mathcal{C}^1$ ) en 0 (elle l'est certainement sur  $]0, \pi]$  comme quotient de fonction usuelles), calculons  $f'(t) = \frac{(a+2bt) \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)(at+bt^2)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{t^2}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \times \left( \left( \frac{2b \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{t} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) + \frac{a}{2t} \left( \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}} - \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) \right)$ . Le quotient de gauche tend vers 4 (on utilise toujours la même limite classique), la première parenthèse tend vers  $b - \frac{1}{2}$ , et la deuxième vers  $1 - 1 = 0$ . Hélas, il n'est pas évident du tout qu'elle continue à tendre vers 0 une fois multipliée par  $\frac{a}{2t}$  (il y a une belle forme indéterminée), et l'indication donnée dans l'énoncé ne suffit pas à le prouver. On aurait en fait besoin d'un tout petit coup de développement limité pour s'en sortir proprement. En admettant que cette deuxième parenthèse disparaisse effectivement, on a une limite pour la dérivée en 0 égale à  $4b - 2 = \frac{2}{\pi} - 2$ , ce qui prouve bien que la fonction  $f$  est dérivable (et sa dérivée continue) en 0.

6. Effectuons donc une IPP en dérivant la fonction  $g$  (on a le droit car  $g$  est  $\mathcal{C}^1$ , d'où l'importance de cette hypothèse), et en posant  $v'(t) = \sin(kt)$ , et donc  $v(t) = \frac{\cos(kt)}{k}$ , pour obtenir  $\int_0^\pi g(t) \sin(kt) dt = \left[ \frac{g(t) \cos(kt)}{k} \right]_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi g'(t) \cos(kt) dt$ . Le crochet tend clairement vers 0 puis son numérateur est majoré en valeur absolue par  $|g(\pi) + g(0)|$  (une constante) et qu'on divise par  $k$ . Quand au second terme, on peut majorer ce qui se trouve dans l'intégrale par  $|g'(t)|$  (puisque  $|\cos(kt)| \leq 1$ , comme pour n'importe quel sinus), et donc toute l'intégrale par  $\frac{1}{k} \int_0^\pi |g'(t)| dt$ , qui tend également vers 0 (c'est une constante divisée par  $k$ ). On a bien prouvé ce qui était demandé.

7. D'après la question précédente, on peut affirmer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt = 0$  (la fonction  $f$  étant celle de la question 5, qui est bien  $\mathcal{C}^1$  sur notre intervalle une fois prolongée). Autrement dit,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi S_n(t)(at+bt^2) dt = 0$ , soit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( C + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) = 0$ . On en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = -\frac{C}{2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

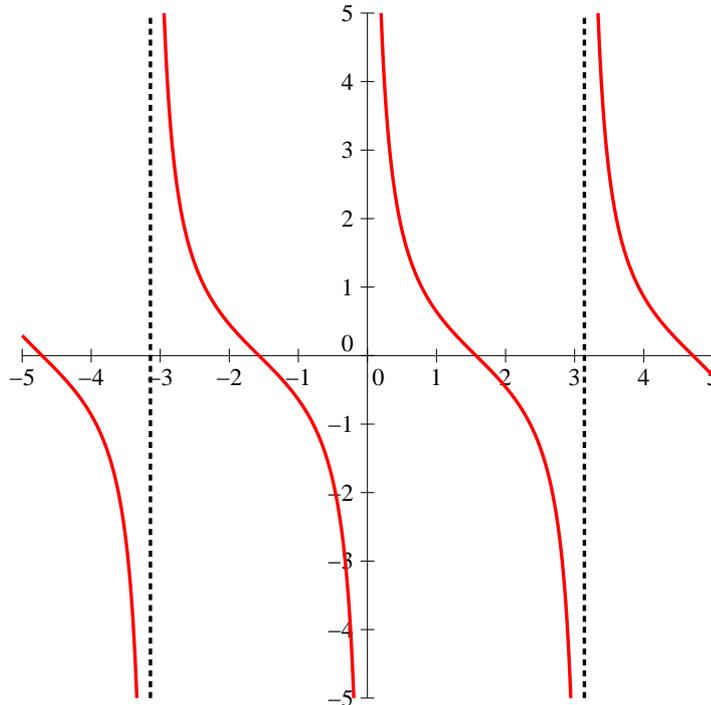
## Deuxième partie : en utilisant des polynômes.

1. La fonction est définie si  $\sin(x) \neq 0$ , donc sur  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Elle est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur chacun de ses intervalles de définition,  $\pi$ -périodique (comme dans le cas de la tangente, numérateur et dénominateur changent tous les deux de signe si on ajoute  $\pi$  à la variable), et impaire.

Sa dérivée est  $\cotan'(x) = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)}$ , qui est toujours négatif. La

fonction cotan est donc strictement décroissante sur  $]0, \pi[$ . Comme  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = +\infty$ , et

$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\infty$  (le sinus étant positif mais le cosinus négatif à cet endroit), la fonction est donc bien bijective de  $]0, \pi[$  dans  $\mathbb{R}$ . Une allure de la courbe représentative sur quelques périodes :



2. (a) Attention, les termes de plus haut degré vont se simplifier lors de la soustraction : d'après le

binôme de Newton,  $Q_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1 - (-1)^{n-k})$ .

Le terme en  $X^n$  s'annule bel et bien, par contre, le terme en  $X^{n-1}$  devient  $\binom{n}{n-1} X^{n-1} (1+1) = 2nX^{n-1}$ . Le polynôme  $Q_n$  est donc de degré  $n-1$  et de coefficient dominant  $2n$ .

- (b) Le polynôme  $Q_n$  s'annule lorsque  $\left(\frac{X+1}{X-1}\right)^n = 1$  (il ne peut pas s'annuler pour  $X=1$

puisque  $Q_n(1) = 2^n$ ). Autrement dit, on doit avoir  $\frac{X+1}{X-1} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ , pour une certaine valeur

de  $k$  appartenant à l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ . On obtient alors  $X+1 = e^{i\frac{2k\pi}{n}} X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ ,

soit  $X = \frac{1 + e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1}$  (en supprimant la valeur  $k=0$  qui rend le dénominateur nul). En

factorisant par l'angle moitié (qui se simplifie entre numérateur et dénominateur), cela

donne  $X = \frac{e^{-i\frac{k\pi}{n}} + e^{i\frac{k\pi}{n}}}{e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}}} = \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = -i \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ , avec  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ,

comme demandé par l'énoncé.

- (c) Les valeurs de  $\frac{k\pi}{n}$  étant des valeurs distinctes appartenant toutes à  $]0, \pi[$  et la fonction cotan étant bijective sur cet intervalle, les racines sont toutes distinctes (et il y en a autant que le degré du polynôme  $Q_n$ ). On peut donc écrire (sans oublier le coefficient dominant) :

$$Q_n = 2n \prod_{k=1}^{n-1} \left( X + i \cotan \left( \frac{k\pi}{n} \right) \right).$$

3. (a) Calculons donc  $P_1 = \sum_{k=0}^1 \binom{3}{2k} X^k = 1 + 3X$ , puis  $P_2 = \sum_{k=0}^2 \binom{5}{2k} X^k = 1 + 10X + 5X^2$ , et

$$\text{enfin } P_3 = \sum_{k=0}^3 \binom{7}{2k} X^k = 1 + 21X + 35X^2 + 7X^3. \text{ Le seul calcul méritant d'être détaillé}$$

$$\text{est celui de } \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 7 \times 5 = 35.$$

- (b) On écrit  $Q_{2n+1}(X) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} X^k (1 - (-1)^{2n+1-k})$ . Les valeurs impaires de  $k$  vont vérifier  $1 - (-1)^{2n+1-k} = 0$ , et les valeurs paires verront au contraire cette même parenthèse prendre la valeur 2. Quitte à poser  $k = 2j$ , avec  $j$  prenant toutes les valeurs de 0 jusqu'à  $n$ , on trouve donc  $Q_{2n+1}(X) = 2 \sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{2j} X^{2j}$ , ce qui correspond exactement à  $2P_n(X^2)$  (en remplaçant bien sûr le  $X^{2j}$  par  $(X^2)^j$ ).

- (c) On sait que  $-i \cotan \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right)$  annule polynôme  $Q_{2n+1}$ , la relation précédente assure donc que le carré de chacune de ces valeurs, à savoir  $-\cotan^2 \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right)$ , est racine du polynôme  $P_n$ . Cela fait toutefois beaucoup trop de racines pour le polynôme  $P_n$  qui est de degré  $n$ . En fait, on peut constater que les valeurs de  $-\cotan^2 \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right)$  sont deux à deux égales, quand on remplace  $k$  par  $2n+1-k$ , puisque  $\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1} = \pi - \frac{k\pi}{2n+1}$ , et  $\cotan(\pi - x) = \frac{\cos(\pi - x)}{\sin(\pi - x)} = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} = -\cotan(x)$ . Cette différence de signe disparaît quand on élève au carré. On peut donc ne garder que les valeurs correspondant à des  $k$  compris entre 1 et  $n$ , et on obtient exactement  $n$  racines distinctes pour  $P_n$  (toutes ces valeurs correspondent à des cotangentes strictement positives, donc ont des carrés distincts). Les racines de  $P_n$  sont donc simples, puisqu'on en a trouvé  $n$  différentes.

- (d) Les relations coefficients-racines nous assurent que la somme des racines d'un polynôme de degré  $n$  est égale à  $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$ ,  $a_k$  désignant le coefficient du terme de degré  $k$  dans le polynôme.

$$\text{Pour } P_n, \text{ on a donc } a_n = \binom{2n+1}{2n} = 2n+1, \text{ et } a_{n-1} = \binom{2n+1}{2n-2} = \frac{(2n+1)!}{(2n-2)!3!} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6}, \text{ et } \frac{-a_{n-1}}{a_n} = -\frac{n(2n-1)}{3}.$$

$$\text{Ce qui correspond à la formule demandée puisque la somme des racines de } P_n \text{ est égale à } \sum_{k=1}^n -\cotan^2 \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right).$$

4. (a) Sur cet intervalle, posons  $g(x) = \sin(x) - x$ , qui a pour dérivée  $g'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$ . La fonction  $g$  est donc décroissante et  $g(0) = 0$ , elle est négative sur  $]0, \frac{\pi}{2}[$ . De même, en posant  $h(x) = \tan(x) - x$ , on a  $h'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x)$ , donc  $h$  est croissante et vérifie  $h(0) = 0$ , elle est positive sur ce même intervalle.

- (b) Tous les termes de l'encadrement précédent étant positifs, on peut l'élever au carré pour

obtenir  $0 < \sin^2(x) \leq x^2 \leq \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$ , puis prendre l'inverse en retournant les inégalités :  $\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\sin^2(x)}$ . Le membre de gauche est bien égal à  $\cotan^2(x)$ , et  $\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)} = 1 + \cotan^2(x)$ .

(c) Appliquons donc :  $\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} \leq \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + 1$ , d'où  $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \left(1 + \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$ . On peut désormais sommer ces encadrement pour  $k$  variant de 1 à  $n$ , en utilisant bien entendu le résultat de la question 3.d pour simplifier les membre extrêmes :  $\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \frac{n(2n+1)}{3} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \times \left(n + \frac{n(2n-1)}{3}\right)$ . Regardons donc ce qui se passe quand  $n$  tend vers  $+\infty$  : en gardant les termes de plus haut degré, le membre de gauche tend vers  $\frac{\pi^2}{3} \times \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2}{4n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  ; et le membre de droite aussi (le  $n$  ajouté n'influence pas le terme de plus haut degré) ! On a bien retrouvé que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

5. (a) Faisons donc une récurrence, puisqu'on nous le demande si gentiment. Lorsque  $n = 1$ , le membre de gauche est égal à  $z_1^2$  et celui de droite aussi (la deuxième somme est vide), l'égalité est vérifiée. Supposons là vrai au rang  $n$ , alors  $\left(\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right)^2 = (A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ , en posant  $A = \sum_{k=1}^n z_k$  et  $B = z_{n+1}$ . Par hypothèse de récurrence,  $A^2 = \sum_{k=1}^n z_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j$ . De plus,  $B^2 = z_{n+1}^2$ , ce qui ajoute le terme manquant à la première somme du membre de droite, et  $2AB = 2 \sum_{i=1}^n z_i z_{n+1}$ , ce qui ajoute exactement les termes manquants à la somme de droite pour que l'égalité soit vraie au rang  $n+1$ .

(b) Pour alléger les calculs, posons  $z_k = \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ . On sait déjà (question 3d) que  $\sum_{k=1}^n z_k = \frac{n(2n-1)}{3}$ . En appliquant la formule obtenue à la question précédente, on obtient  $\sum_{k=1}^n \cotan^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^n z_k^2 = \frac{n^2(2n-1)^2}{9} - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j$ . Reste à calculer la dernière somme double, en utilisant à nouveau les relations coefficients-racines. On sait que les complexes  $z_k$  sont les racines du polynôme  $P_n$ , donc  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$  (avec les mêmes notations que précédemment). Reste à calculer  $a_{n-2} = \frac{(2n+1)}{(2n-4)} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{5!} = \frac{n(n-1)(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{30}$ . On a donc  $2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} z_i z_j = \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{15}$ , puis  $\sum_{k=1}^n \cotan^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n^2(2n-1)^2}{9} - \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{15}$ .

(c) En reprenant le résultat de la question 4b et en l'élevant au carré, on a

$$\frac{\pi^4}{(2n+1)^4} \cotan^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{1}{k^4} \leq \frac{\pi^4}{(2n+1)^4} \left(1 + 2 \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) + \cotan^4\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).$$

On termine de la même façon que plus haut, en additionnant, en remplaçant les sommes de cotangentes par la formule obtenue juste au-dessus, puis en appliquant le théorème des gendarmes. Ainsi, après somme, le membre de gauche de l'encadrement sera égal à

$$\frac{\pi^4}{(2n+1)^4} \left( \frac{n^2(2n-1)^2}{9} - \frac{n(n-1)(2n-1)(2n-3)}{15} \right).$$

En ne gardant que les termes de plus haut degré, on a pour limite  $\frac{\pi^4}{16n^4} \left( \frac{4n^4}{9} - \frac{4n^4}{15} \right) = \frac{\pi^4}{4} \left( \frac{1}{9} - \frac{1}{15} \right) = \frac{\pi^4}{90}$ . La limite

du membre de droite est la même (les termes supplémentaires ne modifient pas le terme de plus haut degré), on conclut donc sur le superbe résultat suivant :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ .

(d) Allez, on est motivés, on recommence pour avoir la limite de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^6}$ ? Non, vraiment, vous

ne voulez pas? Pour information, on trouverait  $\frac{\pi^6}{945}$ .