Feuille d'exercices n°13 : Intégration

PTSI B Lycée Eiffel

16 février 2017

Vrai-Faux

1. Si f est une fonction positive, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt \geqslant 0$.
2. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors il existe une fonction en escalier φ telle que, $\forall x \in [a,b]$, $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$.
3. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = 0$, avec f continue, alors f est nulle sur $[a,b]$.
4. La méthode de Simpson donne une valeur exacte de l'intégrale pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 3.
5. Le reste intégral de la formule de Taylor est donné par la formue $R_n = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\ dt$.

Exercice 1 (**)

On définit, pour tout entier n, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que sur $[1;e]$, on a $(\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$, et en déduire le sens de variation de I_n.
3. Montrer que (I_n) est convergente.
4. Montrer que sur $[1;e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$. En déduire la limite de I_n.
5. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3} I_n$. En déduire la limite de nI_n.

Exercice 2 (**)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\ dt$.

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln 2$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
5. Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln 2 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
7. Donner la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 (*)

On considère la suite définie par $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Déterminer la limite de la suite (I_n).
3. Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
4. On note désormais $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$, exprimer S_n en fonction de I_n.
5. Déduire des questions précédentes la convergence et la limite de la suite (S_n).

Exercice 4 (**)

On définit la suite (I_n) par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos(x)}\right)^n\, dx$.

1. Calculer les valeurs de I_0 et de I_2.
2. À l'aide du changement de variable $t = \sin(x)$ puis d'une (petite) décomposition en éléments simples, calculer I_1.
3. Déterminer la monotonie de la suite (I_n). Peut-on en déduire quelque chose ?
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1} + \frac{n}{n+1} I_n$ (on pourra par exemple écrire $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin^2(x)}{\cos^{n+2}(x)}\, dx$, puis effectuer une IPP intelligente).
5. En déduire la limite de la suite (I_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 (***)

Soit f une fonction telle que $\forall k \leqslant n$, $\int_0^1 t^k f(t)\, dt = 0$, montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[0;1]$.

Exercice 6 (***)

Étudier les fonctions suivantes :

- $f(x) = \int_x^{4x} e^{-t^2}\, dt$
- $g(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{ch}(t)}{t^2}\, dt$
- $h(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\, dt$

Exercice 7 (***)

Pour tout entier naturel k on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(b) Etudier la suite $(f_k(0))_{k\geqslant 0}$. En déduire, pour tout réel positif x, la limite de la suite $(f_k(x))_{k\geqslant 0}$.

2. (a) Soit $x>0$. Etablir que $f_{k+1}(x) = \dfrac{k+1}{x} f_k(x) - \dfrac{e^{-x}}{x}$ pour tout $k \geqslant 0$.

   (b) Expliciter les fonctions f_0, f_1 et f_2.

   (c) Montrer que, $\lim\limits_{x\to+\infty} x f_0(x) = 1/x$.

3. (a) En effectuant un changement de variable, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0$, $f_k(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}} \displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\, du$.
   En déduire que f_k est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

   (b) Trouver une relation simple entre f_k' et f_{k+1}.

   (c) Montrer que pour tout réel $\forall y \geqslant 0$, $1 - e^{-y} \leqslant y$. En déduire que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est continue en 0. Est-elle dérivable à droite en ce point ?

Exercice 8 (**)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes en utilisant des sommes de Riemann.

- $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$
- $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$
- $w_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 9 (****)

Le but de cet exercice est de montrer par l'absurde que π est un nombre irrationnel. Supposons donc que $\pi = \dfrac{p}{q}$ (n'oubliez pas cette hypothèse dans la suite de l'exercice), et posons $P_n(X) = \dfrac{1}{n!} X^n (p - qX)^n$, et $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} P_n(t)\sin(t)\, dt$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(\pi - X) = P_n(X)$.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \geqslant 0$.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{Z}$, et $P_n^{(n)}(\pi) \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n \in \mathbb{N}$ (on pourra procéder à des intégrations par parties successives).
5. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. En déduire que l'hypothèse initiale est absurde.

Exercice 10 (***)

Pour tout entier n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\, dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, dt$.
3. À l'aide d'une intégration par partie, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n.
4. En déduire les valeurs de I_{2p} et I_{2p+1} (on les exprimera à l'aide de factorielles).
5. Déterminer la monotonie de la suite (I_n) puis prouver sa convergence.
6. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{I_{n+1}}$.
7. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1) I_{n+1} I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 11 (***)

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\, dt$.

1. Déterminer la parité de la fonction f.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre à préciser (mais qu'on ne demande pas de résoudre).
3. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} 2xf(x) = 1$.
4. On pose $g(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x} f'(x)$. Montrer que g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qu'elle s'annule en un unique x_0 compris strictement entre 0 et 1.
5. En déduire le tableau de variations de f (on ne cherchera pas à calculer x_0).
6. Tracer une allure plausible de la courbe représentative de f.

Problème (***)

Ce problème présente deux méthodes pour calculer la valeur de $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Les deux parties du problème sont complètement indépendantes.

Première partie : à l'aide d'intégrales.

1. Soit k un entier naturel non nul. Calculer les valeurs des intégrales $\int_0^\pi t\cos(kt)\, dt$ et $\int_0^\pi t^2\cos(kt)\, dt$.
2. En déduire deux constantes a et b (indépendantes de k) telles que $\int_0^\pi (at+bt^2)\cos(kt)\, dt = \dfrac{1}{k^2}$.
3. On pose $S_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$. Vérifier que $\int_0^\pi (at+bt^2)S_n(t) = C + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, où C est une constante qu'on exprimera en fonction de a et de b.
4. Vérifier que, $\forall t \in]0, \pi]$, on a $S_n(t) = \dfrac{\sin(\frac{(2n+1)t}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}$. Que vaut $S_n(0)$?
5. Montrer que la fonction définie sur $]0, \pi]$ par $t \mapsto \dfrac{at+bt^2}{\sin(\frac{t}{2})}$ est prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (on pourra utiliser si besoin que $\lim_{t \to 0} \dfrac{1-\cos(t)}{t^2} = \dfrac{1}{2}$).
6. Montrer que, si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, alors $\lim_{k \to +\infty} \int_0^\pi g(t)\sin(kt) = 0$ (on pourra effectuer une IPP).
7. Déduire des questions précédentes la valeur de $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Deuxième partie : en utilisant des polynômes.

1. On définit la fonction cotangente (en abrégé cotan) par la formule $\text{cotan}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Donner le domaine de définition, la périodicité, les variations sur une période, et une allure de courbe représentative pour cette fonction. On montrera en particulier que cotan est bijective de $]0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$.

2. On définit pour tout entier $n \geqslant 1$ le polynôme $Q_n(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.
   (a) Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n.
   (b) Prouver que les racines de Q_n sont les nombres $-i \operatorname{cotan}\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, pour $n \in \{1, 2 \dots, n-1\}$.
   (c) Montrer que ces racines sont simples, et donner la factorisation de Q_n dans $\mathbb{C}[X]$.
3. On définit désormais un nouveau polynôme (toujours pour $n \geqslant 1$) par $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k} X^k$.
   (a) Donner les expressions explicites des polynômes P_1, P_2 et P_3.
   (b) Montrer que $2P_n(X^2) = Q_{2n+1}(X)$.
   (c) En déduire les racines de P_n, et vérifier qu'elles sont simples.
   (d) Que vaut la somme des racines du polynôme P_n ? En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^2 = \frac{n(2n-1)}{3}$.
4. (a) Montrer que, $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.
   (b) En déduire que, sur le même intervalle, $\operatorname{cotan}^2(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2} \leqslant 1 + \operatorname{cotan}^2(x)$.
   (c) Appliquer l'encadrement précédent à $x = \dfrac{k\pi}{2n+1}$, et en déduire un encadrement de $\dfrac{1}{k^2}$, puis la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.
5. En complément, on peut obtenir presque sans effort supplémentaire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^4}$:
   (a) Montrer par récurrence que, si $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, alors $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 + 2 \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i z_j$.
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)^4$ (on pensera aux relations coefficients-racines dans le polynôme P_n).
   (c) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}$.