TD n°7 : un problème un peu bourrin

PTSI B Lycée Eiffel

2 février 2017

Problème

On donne pour ce problème les valeurs numériques suivantes : $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \simeq 0,6$; $\dfrac{3}{2e} \simeq 0,55$; $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(2)^2 \simeq 0,5$.

I. Une première étude de fonction

On définit la fonction i sur $]0;+\infty[$ par $i(x) = x^2 + x - 2 - x^2\ln(x)$.

1. Calculer la dérivée i' de la fonction i ainsi que sa dérivée seconde i''.
2. Montrer que la fonction i est prolongeable par continuité en 0. La fonction ainsi prolongée est-elle dérivable en 0 ?
3. Déterminer les valeurs d'annulation de i''. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de i aux points correspondants.
4. Montrer que i' s'annule en une unique valeur α. Montrer que $\alpha > 1$.
5. En déduire le tableau de variations de i, et montrer que i s'annule deux fois sur $]0;+\infty[$: en 1 et en une valeur β qu'on ne cherchera pas à déterminer.
6. Tracer une allure soignée de la courbe de i en exploitant tous les calculs effectués dans cette première partie (on donne $\alpha \simeq 2$ et $\beta \simeq 3$).

II. Une deuxième étude de fonction

On définit désormais une fonction f par $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x\ln(x)}$

1. Déterminer le domaine de définition de f. Montrer qu'on peut la prolonger par continuité en 1.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
3. Calculer $f'(x)$ et montrer que son signe est le même que celui de $g(x) = \ln(x) - \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2}$.
4. En admettant que $\ln(x) \underset{x\to 1}{=} x - 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 1}\varepsilon(x) = 0$, montrer que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.
5. Calculer $g'(x)$ et montrer que son signe est le même que celui de $h(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4$.
6. En constatant que $h(1) = h(-2) = 0$, factoriser h et en déduire le tableau de variations de g.
7. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution autre que 1, que l'on notera λ (mais qu'on ne sait pas calculer). En déduire le tableau de variations de f (on donne $f(\lambda) \simeq 2,9$).