TD n°1 : un sujet de bac

PTSI B Lycée Eiffel

2 septembre 2016

Exercice 1

Un gardien de but tente successivement d'arrêter un certain nombrre de penaltys. On dispose des informations suivantes :

- s'il a arrêté le n-ème tir, il arrêtera également le tir $n+1$ avec une probabilité 0.8.
- par contre, s'il a laissé passer le n-ème tir, il arrêtera le suivant avec probabilité 0.6.
- il arrête le tout premier tir avec probabilité 0.7.

On note A_n l'événement « le gardien arrête le tir numéro n » (on a donc $P(A_1) = 0.7$).

1. (a) Déterminer $P_{A_n}(A_{n+1})$ (probabilité conditionnelle de A_{n+1} sachant A_n), et $P_{\overline{A_n}}A_{n+1}$.
   (b) Exprimer $P(A_n \cap A_{n+1})$ et $P(\overline{A_n} \cap A_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$.
   (c) En déduire la relation $P(A_{n+1}) = 0.2 \times P(A_n) + 0.6$.
2. On pose désormais $u_n = P(A_n)$ et $v_n = u_n - \dfrac{3}{4}$.
   (a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 0.2.
   (b) En déduire une expression de p_n en fonction de n.
   (c) Montrer que p_n admet une limite que l'on calculera.

Exercice 2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal d'origine O, on place le point A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$, le point B tel que le triangle OAB soit un triangle équilatéral direct, et le point Q milieu de $[OB]$.

1. (a) Montrer que le point B a pour affixe $b = 4 + 2i\sqrt{3}$. En déduire l'affixe q du point Q.
   (b) Déterminer l'affixe du point K tel que $ABQK$ soit un parallélogramme.
   (c) Vérifier que $\dfrac{z_K - a}{z_K}$ est un nombre imaginaire pur. Que peut-on en déduire pour le triangle OAK ? Préciser la nature du quadrilatère $OQAK$.
   (d) Placer les points A, B, Q et K dans le plan.
2. Soit C le point d'affixe $c = \dfrac{2a}{3}$.
   (a) Calculer $\dfrac{z_K - b}{z_K - c}$. Que peut-on en déduire pour les points B, C et K ?
   (b) Placer le point C sur la figure précédente.

Problème

Dans ce problème, on étudie quelques propriétés de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + e^{2x}$.

I. Études des variations de f.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. (a) Montrer que, pour tout réel x, $f''(x) > 0$.
   (b) En déduire que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une solution unique qu'on note α.
   (c) Vérifier que $-0.5 < \alpha < -0.4$.
3. (a) Préciser, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (d) Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $\left[-2; \dfrac{1}{2}\right]$.

II. Interprétation géométrique de f.

On note Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle.

1. (a) Exprimer en fonction de $f(x)$ la distance du point M de la courbe Γ ayant pour abscisse x à l'origine O du repère.
   (b) Traduire les résultats de la première partie en une propriété concernant la variation de la distance OM lorsque le point M parcourt Γ.
2. Soit A le point de Γ d'abscisse α.
   (a) Écrire une équation de la tangente T à Γ en A.
   (b) Quelle relation peut-on écrire entre les coefficients directeurs des droites (OA) et T ? Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
   (c) On note β l'abscisse du point d'intersection de la droite T avec l'axe des abscisses. Calculer en fonction de α l'aire du domaine délimité par la courbe Γ, la tangente T, et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = \beta$.

Bon, je n'ai pas dit non plus que c'était un sujet de bas **récent**, celui-ci est un peu plus vieux que vous (1997). Si j'avais voulu vous faire vraiment peut, j'aurais pu prendre un sujet de 1978. Juste la première phrase d'un sujet de cette année-là : « On rappelle que les applications linéaires d'un espace vectoriel dans lui-même sont appelées endomorphismes. ». Oui, on va encore attendre un peu.