Interrogation Écrite n°8 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

11 avril 2017

1. On sait que $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$, on peut donc composer (en faisant bien attention à garder une variable qui tend vers 0 pour le second développement limité) : $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3 + o(x^3)} =$ $\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{32}x^3\right)^3 + o(x^3)\right)$
$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}x^2 + \frac{1}{64}x^3 - \frac{1}{128}x^2 + \frac{1}{256}x^3 + \frac{1}{1\,024}x^3 + o(x^3)\right)$
$= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}x - \frac{5\sqrt{2}}{128}x^2 + \frac{21\sqrt{2}}{1\,024}x^3 + o(x^3)$.
2. On commence bien entendu par mettre sous forme exponentielle : $e^{\cos(x)\ln(\sin(x)}$. On n'a aucun problème pour écrire $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$, mais le deuxième facteur dans l'exponentielle est plus gênant : $\ln(\sin(x)) = \ln\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6)\right) = \ln(x) +$ $\ln\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^5)\right) = \ln(x) - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{72}x^4 + o(x^5) = \ln(x) - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 +$ $o(x^5)$. Ce dernier développement n'est pas un développement limité à proprement parler, mais plutôt un développement asymptotique. On ne pourra de toute façon pas obtenir mieux, on ne peut pas se débarasser des $\ln(x)$. On continue quand même le calcul : $\cos(x)\ln(\sin(x)) =$ $\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right)\left(\ln(x) - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^5)\right) = \ln(x) - \frac{\ln(x)}{2}x^2 + \frac{\ln(x)}{24}x^4 -$ $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4) = \ln(x) + \left(-\frac{\ln(x)}{2} - \frac{1}{6}\right)x^2 + \left(\frac{\ln(x)}{24} + \frac{7}{90}\right)x^4 + o(x^5)$. Il ne reste plus qu'à mettre tout ça dans l'exponentielle : $e^{\cos(x)\ln(\sin(x))} = xe^{(-\frac{\ln(x)}{2} - \frac{1}{6})x^2 + (\frac{\ln(x)}{24} + \frac{7}{90})x^4 + o(x^5)}$. Ce qui se trouve dans l'exponentielle tend vers 0 (par croissance comparée pour les produits de puissances et de puissances du ln), et il suffit d'aller jusqu'à l'ordre 2 pour obtenir ce qu'on veut : $\sin(x)^{\cos(x)} = x\left(1 + \left(-\frac{\ln(x)}{2} - \frac{1}{6}\right)x^2 + \left(\frac{\ln(x)}{24} + \frac{7}{90}\right)x^4 + \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln(x)}{2} - \frac{1}{6}\right)^2 x^4 + o(x^5)\right)$
$= x + \left(-\frac{\ln(x)}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{\ln^2(x)}{8} + \frac{\ln(x)}{8} + \frac{11}{120}\right)x^5 + o(x^5)$.
3. On peut faire tous les calculs d'un seul coup en calculant un développement limité (ou asymptotique dans le cas où la fonction n'admet pas de limite finie en 0) : $f(x) = \frac{1}{x}(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 -$ $x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$. Ce calcul prouve que la fonction admet pour limite 0 en 0, elle est donc prolongeable par continuité en posant $f(0) = 0$. Ce prolongement est dérivable (puisque la fonction admet un développement limité à l'ordre 1 en 0), et l'équation de la tangente à la courbe sera $y = -\frac{1}{2}x$. De plus, $f(x) - \left(-\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \sim \frac{1}{2}x^2$ qui

est positif au voisinage de 0, donc la courbe resprésentative de f sera au-dessus de sa tangente au voisinage de 0.

4. On commence comme toujours par poser $X = \dfrac{1}{x}$ (la variable X a donc pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$), puis on écrit $g\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{\frac{1}{X}^2}{1 - \frac{1}{X}} e^X = -\dfrac{1}{X}\dfrac{e^X}{1-X}$. On peut développer $\dfrac{e^X}{1-X} = \left(1 + X + \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{6}X^3 + o(X^3)\right)\left(1 + X + X^2 + X^3 + o(X^3)\right) = 1 + 2X + \dfrac{5}{2}X^2 + \dfrac{8}{3}X^3 + o(X^3)$. Le dernier terme calculé sera en fait inutile, on va l'oublier pour la suite : $g\left(\dfrac{1}{X}\right) = -\dfrac{1}{X} - 2 - \dfrac{5}{2}X + o(X)$, donc $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} -x - 2 - \dfrac{5}{2x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ce calcul prouve que la droite d'équation $y = -x - 2$ est asymptote oblique à la courbe représentative de g. De plus, $g(x) - (-x - 2) \sim -\dfrac{5}{2x}$ qui est négatif au voisinage de $+\infty$, donc la courbe sera en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.