Interrogation Écrite n°7 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

21 mars 2017

1. Voir le cours.
2. Les racines complexes de P sont les racines quatrièmes de $-4 = 4e^{i\pi}$, donc les quatre nombres $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i$; $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = -1 + i$; $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -1 - i$ et $z_4 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$. La factorisation de P dans $\mathbb{C}[X]$ est donc $P = (X - 1 - i)(X + 1 - i)(X + 1 + i)(X - 1 + i)$. En regroupant les racines conjuguées $-1 \pm i$ et $1 \pm i$, on trouve la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$: $P = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2)$.
3. Prouvons que la famille est génératrice, et essayons pour cela d'écrire un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$ sous la forme $aX^2 + bX + c = \lambda_1(X^2 + 2) + \lambda_2(X^2 + X + 1) + \lambda_3(X^2 - X + 1)$. On obtient le système équivalent $\left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & a \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & b \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & c \end{array}\right.$. La différence des équation extrêmes donne immédiatement $\lambda_1 = c - a$, et la somme des deux premières $\lambda_1 + 2\lambda_2 = a + b$, donc $\lambda_2 = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\lambda_1 = a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. Enfin, $\lambda_3 = \lambda_2 - b = a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$. La famille est donc bien génératrice. Comme de plus le système qu'on vient de résoudre a une solution unique, ce qui prouve la liberté de la famille, qui est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Les coordonnées du polynôme $(X + 1)^2 = X^2 + 2X + 1$ sont obtenues en remplaçant simplement a, b et c par 1, 2 et 1 dans les calculs précédents : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, et $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$. En effet, $(X + 1)^2 = \frac{3}{2}(X^2 + X + 1) - \frac{1}{2}(X^2 - X + 1)$.
4. On peut simplement écrire $F = \{(x, y, -2x+y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 0, -2), (0, 1, 1))$. Les ensembles F et G sont donc bien des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. De plus, si $u(x, y, z) \in F \cap G$, alors $u = k(1, 2, -1)$ puisque $u \in G$, donc $u = (k, 2k, -k)$. Puisque u doit aussi appartenir à F, on doit avoir $2k - 2k - k = 0$, soit $k = 0$, et donc $u = 0$, ce qui prouve que $F \cap G = \{0\}$. Reste ensuite à prouver que $F + G = \mathbb{R}^3$. Pour cela, il suffit d'écrire un vecteur $u = (x, y, z)$ sous la forme $a(1, 2, -1) + b(1, 0, -2) + c(0, 1, 1)$, ce qui revient à résoudre le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & & & = & x \\ 2a & & & + & c & = & y \\ -a & - & 2b & + & c & = & z \end{array}\right.$. On peut pour une fois procéder par substitution : $b = x - a$ et $c = y - 2a$, donc $-a - 2x + 2a + y - 2a = z$, soit $a = -2x + y - z$. Ensuite, on en déduit $b = 3x - y + z$ et $c = 4x - y + 2z$. Le système a toujours une solution donc $F + G = \mathbb{R}^3$ et les deux sous-espaces sont bien supplémentaires.