Interrogation Écrite n°6 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

14 février 2017

- **Domaine de définition** : la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$, continue sur chacun de ses deux intervalles de définition mais dérivable a priori sur $\mathbb{R}\backslash\{-2,0\}$.
- **Limites et asyptotes** : on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, dont on déduit facilement que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ (notons que la fonction f est de toute façon positive sur tout son ensemble de définition). Même si ce n'était pas demandé, intéressons-nous aux asymptotes olbiques éventuelles : $\dfrac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}} \times \pm\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}$ (le signe devant la racine carrée étant celui de $\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$, c'est-à-dire celui de x), donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$. Il ne reste plus qu'à calculer les limites de $f(x)-x$ (en $+\infty$) et de $f(x)+x$ (en $-\infty$) pour conclure sur la présence d'asymptotes. Hélas, ce dernier calcul est loin d'être évident, et on ne peut guère s'en sortir sans développements limités. Pour les curieux, en $+\infty$, on pourra bientôt écrire ce genre de calcul : $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}} = x\left(1+\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)\left(1+\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = x\left(1+\dfrac{2}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = x+2+o(1)$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$. On prouverait de même que la droite d'équation $y = -x-2$ est asymptote en $-\infty$.
- **Prolongement et dérivabilité** : en -2, la fonction est bien sûr définie (avec $f(-2) = 0$), calculons son taux d'accroissement sous la forme que j'ai moins utilisée dans le cours : $\tau_{-2}(y) = \dfrac{f(y)-f(-2)}{y+2} = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{-x}}{\sqrt{|x+2|}}$ (valable lorsque $x<0$, ce qui est le cas au voisinage de -2). Ce taux d'accroissement a manifestement des limites infinies à gauche et à droite de -2 (pour être précis, $-\infty$ à gauche et $+\infty$ à droite), la fonction f n'est donc pas dérivable en -2 et la courbe y admettra une tangente verticale.
  En 0, il faut déjà calculer les limites de f. On a $\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$, donc sans difficulté $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = 0$. Par contre, $\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, et par croissance comparée, on en déduit que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$ (ceux qui veulent rédiger la croissance comparée très proprement poseront simplement $X = \dfrac{1}{x}$). On peut donc prolonger f uniquement par continuité à gauche en 0 en posant $f(0) = 0$. Notons que, pour le prolongement correspondant, on a le taux d'accroissement $\tau_0(h) = \dfrac{e^{\frac{1}{h}}}{h}\sqrt{|h^2+2h|}$ qui a une limite nulle en 0^- (la fraction à gauche tend vers 0 par une croissance comparée extrêmement classique), donc le prolongement est dérivable, il y aura une demi-tangente horizontale à gauche en 0.
- **Variations de** f : posons pour simplifier $g(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x}$ (on aura donc $f(x) = g(x)$ sur chacun des deux intervalles $]-\infty,-2[$ et $]0,+\infty[$, et calculons (là où ça a un sens) $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x}+e^{\frac{1}{x}}\times\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+2x}}\left(x+1-\dfrac{x+2}{x}\right) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}(x^2-2)}{x\sqrt{x^2+2x}}$. Sur l'intervalle restant $]-2,0[$, on aura simplement par un calcul extrêmement similaire $f'(x) =$

$\dfrac{e^{\frac{1}{x}}(2-x^2)}{x\sqrt{-x^2-2x}}$. La dérivée de f est donc du signe de $\dfrac{x^2-2}{\pm x}$, ce qui s'étudie très simplement. En particulier, les valeurs d'annulation de la dérivée seront obtenues pour $x = \pm\sqrt{2}$. Essayons d'estimer $f(\sqrt{2}) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{2+\sqrt{2}}$. On sait déjà que $e^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \simeq 2$, et $\sqrt{2+2\sqrt{2}} \simeq \sqrt{4.8} \simeq 2.2$, donc $f(\sqrt{2}) \simeq 4.4$. De même, on aura $e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \simeq \dfrac{1}{2}$ (c'est l'inverse de la valeur donnée dans l'énoncé !), et $\sqrt{-2+2\sqrt{2}} \simeq \sqrt{0.8} \simeq 0.9$, donc $f(-\sqrt{2}) \simeq 0.45$. On peut dons dresser le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$0 \Vert -\infty$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\simeq 0.45$	$\searrow$	$0 \Vert +\infty$	$\searrow$	$\simeq 4.4$	$\nearrow$	$+\infty$

- **Convexité** : Dérivons donc la fonction g' obtenue tout à l'heure :

$$g''(x) = \frac{-\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}(x^2-2)\sqrt{x^2+2x} + 2x^2e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x^2+2x} - e^{\frac{1}{x}}(x^2-2)\sqrt{x^2+2x} - \frac{e^{\frac{1}{x}}x(x+1)(x^2-2)}{\sqrt{x^2+2x}}}{x^2(x^2+2x)}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3(x^2+2x)^{\frac{3}{2}}}(2x^3(x^2+2x) - (x^2-2)(x^2+2x) - x(x^2-2)(x^2+2x) - (x^3+x^2)(x^2-2))$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3(x^2+2x)^{\frac{3}{2}}}(2x^5+4x^4-x^4-2x^3+2x^2+4x-x^5-2x^4+2x^3+4x^2-x^5-x^4+2x^3+2x^2)$$

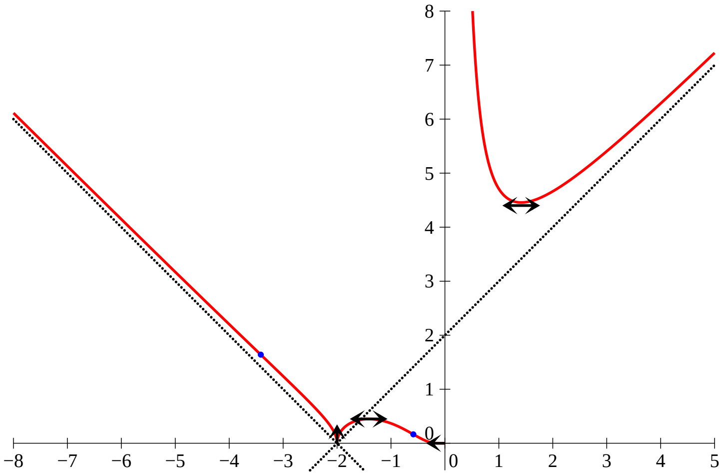
$$= \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3(x^2+2x)^{\frac{3}{2}}}(2x^3+8x^2+4x) = \frac{2e^{\frac{1}{x}}(x^2+4x+2)}{x^2(x^2+2x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bref, cette dérivée est bêtement du signe du trinôme x^2+4x+2, qui a pour discriminant $\Delta = 16-8 = 8$, et s'annule donc en $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{8}}{2} = -2-\sqrt{2}$ et $x_2 = \sqrt{2}-2$. Cette dérivée seconde n'est comme tout à l'heure valable que sur les intervalles $]-\infty,-2[$ et $]0,+\infty[$, mais sur l'intervalle $]-2,0[$, on aura de façon similaire f'' qui sera aussi du signe de x^2+4x+2 (refaites le calcul si ça vous amuse). D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		-2		$\sqrt{2}-2$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
f		convexe		concave		concave		convexe		convexe	

Les points de changement de concavité ne sont pas vraiment sympathiques à placer, ils sont en bleu sur la courbe ci-dessous (mais je n'ai pas essayé de placer les tangentes correspondantes !).

- **Courbe** : il n'y a plus qu'à tout regrouper sur une belle courbe !



8
7
6
5
4
3
2
1
0
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5