Interrogation Écrite n°5

PTSI B Lycée Eiffel

20 janvier 2017

1. Grmbl cours.
2. Je vais utiliser ma méthode préférée en résolvant le système $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & a \\ & - & y & + & z & = & b \\ x- & 2y & & & & = & c \end{array}\right.$
   Encore pire, je vais maintenant procéder par substitution : $x = a - 2z$ et $y = z - b$, donc (en remplaçant dans la dernière équation) $a - 2z - 2z + 2b = c$, soit $z = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c$. On en déduit $x = \frac{1}{2}a - b + \frac{1}{2}c$ et $y = \frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c$. La matrice A est donc inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Le mot contient 10 lettres, dont trois R, trois E, deux C et deux H, son nombre d'anagrammes est donc $\dfrac{10!}{3!^2 2!^2} = \dfrac{10!}{6^2 \times 4} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 5 = 25\ 200$.
4. On va chercher bêtement les matrices solutions sous la forme $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On calcule alors $AB = \begin{pmatrix} a + 3c & b + 3d \\ -2a + 2c & -2b + 2d \end{pmatrix}$, et $BA = \begin{pmatrix} a - 2b & 3a + 2b \\ c - 2d & 3c + 2d \end{pmatrix}$. Les matrices A et B commutent donc si $\begin{pmatrix} 3c + 2b & 3d - b - 3a \\ 2d - 2a + c & -2b - 3c \end{pmatrix} = 0$. Les deux coefficients diagonaux donnent la même condition $c = -\frac{2}{3}b$. En reportant, les deux dernières équations deviennent $3d - b - 3a = 0$ et $2d - 2a - \frac{2}{3}b = 0$, qui sont en fait identiques à un facteur $\frac{2}{3}$ près. On peut quand même en tirer la condition $d = a + \frac{1}{3}b$. Les coefficients a et b peuvent par contre être choisis comme on le veut, et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{2}{3}b & a + \frac{1}{3}b \end{pmatrix}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
5. (a) $\binom{12}{4} = 495$.
   (b) $\binom{7}{2} \times \binom{5}{2} = 210$.
   (c) $\binom{11}{3} = 165$.
   (d) $\binom{7}{4} + \binom{5}{4} = 40$.
   (e) Le nombre d'équipes contenant à la fois Gérard et Maurice est $\binom{10}{2} = 90$, par passage au complémentaire, il en reste $495 - 90 = 405$ ne contenant pas à la fois Gégé et Momo.