Interrogation Écrite n°4 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

13 décembre 2016

1. On utilise la formule d'Euler avant de développer bourrinement :
$$\begin{aligned}\sin^6(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^6\\ &= \frac{e^{i6x}-6e^{i4x}+15e^{i2x}-20+15e^{-i2x}-6e^{-i4x}+e^{-i6x}}{-64}\\ &= \frac{-(e^{i6x}+e^{-i6x})+6(e^{i4x}+e^{-i4x})-15(e^{i2x}+e^{-i2x})+20}{64}\\ &= \frac{-2\cos(6x)+12\cos(4x)-30\cos(2x)+20}{64}\\ &= -\frac{1}{32}\cos(6x)+\frac{3}{16}\cos(4x)-\frac{15}{32}\cos(2x)+\frac{5}{16}\end{aligned}$$
2. On calcule évidemment pour commencer le discriminant $\Delta = 4(i\sqrt{3}-1)^2+32(1+i\sqrt{3}) = 4(-3+1-2i\sqrt{3})+32+32i\sqrt{3} = 24+24i\sqrt{3}$. On vous a tous appris à calculer ensuite une racine carrée du discriminant sous forme algébrique, c'est pourquoi nous allons ici nous empresser de ne pas appliquer cette méthode pour chercher δ sous forme exponentielle (des fois c'est plus facile). On écrit donc $\Delta = 48\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 48e^{i\frac{\pi}{3}}$, on peut alors prendre $\delta = \sqrt{48}e^{i\frac{\pi}{6}} = 4\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 6+2i\sqrt{3}$ (ce nombre est bien l'une des deux racines carrées de Δ, l'autre étant bien sûr $-\delta$). On conclut en calculant les deux solutions de notre équation : $z_1 = \frac{2i\sqrt{3}-2-6-2i\sqrt{3}}{2} = -4$, et $z_2 = \frac{2i\sqrt{3}-2+6+2i\sqrt{3}}{2} = 2+2i\sqrt{3} = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.
3. En éliminant les cas particuliers $z=0$ (interdit par le $\frac{1}{z}$ de l'énoncé), $z=1$ (pour lequel les trois points sont confondus, on peut donc le considérer comme solution du problème) et $z=-1$ (pour lequel les points d'affixe z et $\frac{1}{z}$ sont confondus, il est donc aussi solution du problème), les trois points sont alignés si eu seulement si $\frac{z^2-z}{z-\frac{1}{z}} \in \mathbb{R}$, soit en multipliant tout par z : $\frac{z^2(z-1)}{z^2-1} \in \mathbb{R}$. On peut tout simplifier par $z-1$ pour obtenir la condition équivalente plus simple $\frac{z^2}{z-1} \in \mathbb{R}$. Il est temps de poser $z=a+ib$, pour calculer $\frac{z^2}{z-1} = \frac{a^2-b^2+2iab}{a-1+ib} = \frac{(a^2-b^2+2iab)(a-1-ib)}{(a-1)^2+b^2}$. Ce nombre est réel si et seulement si la partie imaginaire de son numérateur est nul, soit en développant $2ab(a+1)-b(a^2-b^2)=0$, ou encore $a^2b+2ab+b^3=0$. On peut factoriser par b, le deuxième facteur étant alors égal à a^2+2a+b^2. Or, $a^2+2a+b^2=0 \Leftrightarrow (a+1)^2+b^2=1$. Le nombre z est donc solution du problème si $b=0$, c'est-à-dire si z est réel (ce n'est pas une surprise), ou si l'image de z dans le plan complexe appartient au cercle de centre $A(-1)$ et de rayon 1.
4. On commence par écrire notre nombre sous forme exponentielle : $\frac{-1-i}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$ (on peut bien sûr aussi calculer le module de façon classique). Les racines cubiques sont donc les trois nombres $z_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$; $z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i(-\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3})} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$; et $z_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i(-\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3})} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{13\pi}{12}}$ (pour ces deux-là on se dispensera de la forme algébrique).

5. Une façon astucieuse de gérer les choses consiste à dire qu'un nombre complexe a un carré réel si et seulement si il est lui-même réel, ou s'il est imaginaire pur (si vous n'êtes pas convaincus, réfléchissez-y un peu mieux). Ici, on veut donc que le nombre $\dfrac{z}{z-1}$ appartienne soit à $\mathbb{R}$, soit à $i\mathbb{R}$. Après avoir éliminé la possibilité $z = 1$, posons donc $z = a + ib$ et calculons $\dfrac{a+ib}{a-1+ib} = \dfrac{(a+ib)(a-1-ib)}{(a-1)^2+b^2} = \dfrac{a^2+b^2-a-ib}{(a-1)^2+b^2}$. Ce nombre est réel si et seulement si $-b = 0$, donc si z lui-même est réel, et il est imaginaire pur si $a^2 - a + b^2 = 0$, soit $\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + b^2 = \dfrac{1}{4}$, donc si l'image de z dans le plan complexe appartient au cercle de centre $B\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$ (privé du point d'affixe 1).