NOM :
Prénom :

Interrogation Écrite n°3

PTSI B Lycée Eiffel

8 novembre 2016

1. On reconnait une fonction de la forme $\frac{u'}{u}$ à l'intérieur de l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x)}{1+2\sin(x)}\, dx = \frac{1}{2}[\ln(1+2\sin(x))]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{3})$.
2. L'équation homogène (et normalisée) associée $y' + \frac{y}{x\ln(x)} = 0$ admet pour solutions les fonctions $y_h : x \mapsto Ke^{-\ln(\ln(x))} = \frac{K}{\ln(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$. Cherchons désormais une solution particulière en appliquant la méthode de variation de la constante pour poser $y_p(x) = \frac{K(x)}{\ln(x)}$. On calcule alors $y_p'(x) = \frac{K'(x)}{\ln(x)} - \frac{K(x)}{x\ln^2(x)}$. L'équation $y_p'(x) + \frac{y_p(x)}{x\ln(x)} = \frac{1}{\ln(x)}$ est alors équivalente à la simple condition $\frac{K'(x)}{\ln(x)} = \frac{1}{\ln(x)}$. On peut donc simplement poser $K(x) = x$, soit $y_p(x) = \frac{x}{\ln(x)}$. Les solutions de l'équation complète sont donc de la forme $y(x) = \frac{K+x}{\ln(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
3. On commence par décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $x^2 - x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 1+8 = 9$ et pour racines $x_1 = \frac{1-3}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{1+3}{2} = 2$. On peut donc écrire $\frac{x}{x^2-x-2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-2}$. En multipliant l'égalité par $x+1$ puis en posant $x = -1$, on obtient $a = \frac{-1}{-1-2} = \frac{1}{3}$. De même, en multipliant par $x-2$ puis en posant $x = 2$, on trouve $b = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$. Reste à calculer $\int_0^1 \frac{1}{3(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)}\, dx = \frac{1}{3}[\ln(x+1) + 2\ln(2-x)]_0^1 = \frac{1}{3}(\ln(2) - 2\ln(2)) = -\frac{\ln(2)}{3}$.
4. L'équation homogène normalisée (définie sur $\mathbb{R}$) $y' + \frac{t}{1+t^2}y = 0$ admet pour solutions les fonctions $y_h : t \mapsto Ke^{-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)} = \frac{K}{\sqrt{1+t^2}}$, avec $K \in \mathbb{R}$. La variation de la constante ne donne rien d'évident ici, mais il y a en fait une solution particulière évidente : $y_p(t) = t$. En effet, $(1+t^2) \times 1 + t^2 = 1 + 2t^2$. On conclut alors : les solutions de l'équation complète sont de la forme $y(t) = t + \frac{K}{\sqrt{1+t^2}}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
5. Posons donc $t = \cos(x)$, ce qui donne $dt = -\sin(x)\, dx$. Les bornes deviennent $\cos(0) = 1$ et $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On peut alors écrire $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3(x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3(x)}{\cos^3(x)}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2(x)-1}{\cos^3(x)} \times (-\sin(x))\, dx = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{t^2-1}{t^3}\, dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t}\, dt = \left[-\frac{1}{2t^2} - \ln(t)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = -\frac{1}{2} + 1 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1-\ln(2)}{2}$.