Interrogation Écrite n°2 : corrigé

PTSI B Lycée Eiffel

9 octobre 2015

1. Cf cours.
2. On peut par exemple écrire $\cos(2x) = \sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. On en déduit qu'on a soit $2x \equiv \frac{\pi}{2} - x[2\pi]$, soit $2x \equiv x - \frac{\pi}{2}[2\pi]$, ce qui donne $x \equiv \frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$. En fait, comme $-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}$, on peut ne garder que la première condition.
3. On pose $X = \cos(x)$ pour sa ramener à l'inéquation $2X^2 - X - 1 < 0$. Le trinôme a pour discrminant $\Delta = 1 + 8 = 9$ et admet pour racines $X_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{1+3}{4} = 1$. Le trinôme est négatif entre ses racines, notre inéquation est donc vérifiée lorsque $\cos(x) \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. Autrement dit, $\mathcal{S} = \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$.
4. Posons donc joyeusement $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$. Calculons donc $f'(x) = -\frac{1}{x^3} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{4x^4}} - \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(x+1)^2}} + \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \frac{(x-1)^2}{x^2}} = -\frac{4x}{4x^4+1} - \frac{1}{2x^2+2x+1} + \frac{1}{2x^2-2x+1} = -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{2x^2+2x+1-2x^2+2x-1}{(2x^2+1)^2-(2x)^2} = -\frac{4x}{4x^4+1} + \frac{4x}{4x^4+1} = 0$. Oh, quelle surprise, la fonction f est constante ! Attention quand même, la constante pourrait être différente sur chacun de ses trois intervalles de définition $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$. On calcule par exemple $f(1) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan(0) = 0$ pour constater que la fonction est nulle sur le dernier intervalle. Pour l'intervalle du milieu, on peut calculer la limite quand x tend vers 0^+ (aucune difficulté particulière) qui vaut $\frac{\pi}{2} - 0 - \frac{\pi}{2} = 0$, la fonction f est aussi nulle sur $]0, 1[$. Enfin, pour l'intervalle de gauche, on peut regarder la limite en $-\infty$ (pas plus dur), qui vaut $0 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$. Finalement, $f(x) = 0$ pour tous les réels x pour lesquels f est définie.
5. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique. On peut l'étudier sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Comme $f'(x) = 2\cos(2x) - 2\sin(x) = 2(\cos(2x) - \sin(x))$, notre dérivée s'annule lorsque $x \equiv \frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ (on a déjà résolu l'équation à la question 2 !). Pour obtenir le signe de f' sur chaque intervalle, on peut ne pas s'embêter et calculer $f'(\pi) = f'(-\pi) = 2 > 0$, $f'(0) = 2 > 0$, et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 < 0$. On peut alors dresser le tableau de variations suivant :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-1	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$1+\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$1-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	-1

On calcule les valeurs $f(-\pi) = f(\pi) = 1 - 2 = -1$; $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$; $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = 1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; de même $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1 - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. On peut ajouter $f(0) = 1 + 2 = 3$, et $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, et tracer la courbe suivante :